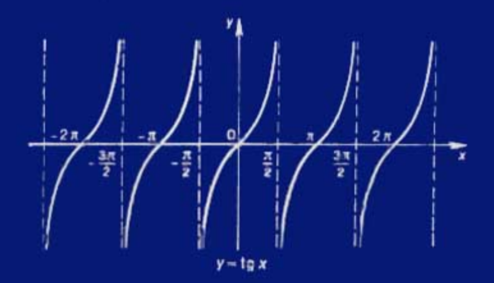
ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

R.A.KALNIN





ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

Р. А. Калнин

АЛГЕБРА
И
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

R. A. Kalnin

ALGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES

Traducido del ruso
por el ingeniero Akop Grdian



EDITORIAL • MIR • MOSCU

Primera edición 1973
Segunda edición 1978
Tercera edición 1988

На испанском языке

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-000606-0

INDICE

CAPITULO I

ELEMENTOS DE CALCULOS APROXIMADOS

§ 1. Fuentes de números aproximados

En la actividad práctica de las personas, así como en la ciencia y en la técnica se tropieza constantemente tanto con números exactos como con números aproximados, lo que se aprecia de los siguientes ejemplos:

1) Si en cada paquete hay 20 libros, en 100 paquetes iguales habrá 2000 libros. Está claro que el número 2000 es exacto.

2) De acuerdo al último censo de la población de Moscú, al comienzo del año 1970 vivían cerca de 7,1 millones de personas. El número 7,1 millones es aproximado (generalmente todos los datos estadísticos se redondean).
En este caso, se ha redondeado con una exactitud de hasta 0,1 millón = 100 000, y por eso, sólo podemos afirmar que el número real de personas que ha vivido en Moscú al comienzo del año 1970 ha oscilado entre 7,05 y 7,15 millones.

3) En todas las informaciones de la Dirección Central de Estadística de la URSS sobre la producción industrial (automóviles, motocicletas, televisores, etc.) los datos se dan en miles redondeados, lo que indica su carácter aproximado. Lo mismo ocurre exactamente en cualquier experimento científico; en cualquier medición en condiciones locales o de laboratorio se obtienen números aproximados, puesto que las indicaciones de los distintos aparatos de medida las podemos determinar solamente con cierto error. Surgen las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo estimar la exactitud de los números aproximados?

2) ¿Cómo realizar las operaciones aritméticas con los números aproximados?

Las respuestas a estas preguntas se dan en los siguientes párrafos.

§ 2. Error absoluto y su límite

Supongamos que el número a es un valor aproximado de cierta magnitud, el número A, un valor real, o exacto, de la misma magnitud. Como se sabe, la magnitud absoluta de un número no negativo a es el mismo número a; la magnitud absoluta del número negativo a es un número opuesto (inverso) a él $(-a)$. El signo de la magnitud absoluta es $|\ \ |$, es decir, dos trazos verticales, entre los cuales se escribe el número o la expresión literal.

● DEFINICION. La magnitud absoluta de la diferencia entre los valores exacto y aproximado de la magnitud se denomina *error absoluto del número aproximado* a:

$$\alpha = |A - a|,$$

donde por la letra α («alfa») se ha designado el error absoluto.

E j e m p l o s. 1) En una escuela de peritaje han ingresado 514 personas; si el número exacto 514 se redondea hasta las centenas, obtenemos un número aproximado $a = 500$; su error absoluto $\alpha = |514 - 500| = 14$ (personas).

2) Al comprar un reloj el cliente recibe un certificado de garantía, en el que la fábrica de relojes responde por la exactitud de la marcha diaria del mismo en los límites de $\pm$ 45 segundos, lo que significa que: el reloj no debe adelantar o atrasar más de 45 segundos. Supongamos que al verificar el reloj con las señales de la hora exacta (hora oficial), transmitidas por radio, se ha descubierto que éste adelanta 20 segundos por día; en tal caso, $\alpha = 20$ segundos es el error absoluto de la marcha diaria de los relojes. El número 45 (s) es lo que se admite llamar *límite* del error absoluto de un número aproximado; en este caso, el número aproximado es el tiempo que indica el reloj. En la mayoría de los casos los valores exactos de las magnitudes nos son desconocidos, y, por eso, no se puede determinar tampoco el error absoluto, es decir el número α; sin embargo, en cada caso concreto se puede establecer el *límite* del error absoluto, sobreentendiendo bajo ello un número positivo tal que el error absoluto α siempre sea menor que este número. El límite del error absoluto de un número aproximado a lo vamos a designar por Δa («delta a»).

3) Un ajustador no puede elaborar exactamente una pieza, digamos, de 80 mm de longitud. Pero con ayuda de un calibre puede establecer que se ha desviado de la medida dada

en no más de 0,02 mm en uno u otro lado. En este caso $\Delta a = 0,02$ mm, si por a se supone el largo aproximado de 80 mm.

De lo dicho antes se deduce que es más práctico utilizar el concepto de límite del error absoluto, que el error absoluto, cuando se quiera estimar la exactitud del número aproximado. En adelante, al límite del error absoluto lo denominaremos simplemente error absoluto, conservando la notación Δa.

§ 3. Error relativo

Para comparar la exactitud de dos o varios números aproximados no es suficiente conocer sus errores absolutos, lo que se puede apreciar del siguiente ejemplo.

Se han realizado dos mediciones:

1) el largo de la pizarra de clase es $d_1 = 2,4$ m con un error absoluto $\Delta d_1 = 0,05$ m;

2) la distancia d_2 entre dos estaciones ferroviarias es $d_2 = 3,48$ km con un error absoluto $\Delta d_2 = 10$ m. Hay que saber cual de estas dos mediciones se ha efectuado más exactamente. A primera vista puede parecer que la primera medición es más exacta, es que aquí el error absoluto sólo es igual a 5 cm, mientras que al medir la distancia entre estaciones se admitió un error de 10 m. Tal parecer es erroneo: hay que tener en cuenta que en el primer caso el error absoluto de 5 cm decae en un largo relativamente pequeño y constituye $\frac{5 \text{ cm}}{240 \text{ cm}} = \frac{1}{48} \approx 0,02$ de la longitud medida; en el segundo caso esta relación es

$$\frac{10 \text{ m}}{3480 \text{ m}} = \frac{1}{348} \approx 0,0029.$$

De este modo, resulta que la segunda medición es aproximadamente 7 veces más exacta que la primera.

● DEFINICION. La relación del error absoluto del número aproximado al número mismo se denomina su *error relativo*

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a},$$

donde δ_a («delta minúscula» con índice a) denota el error relativo del número a.

Frecuentemente el error absoluto se expresa en tanto por ciento. En el ejemplo examinado en este párrafo el error relativo es igual al 2% y 0,29% respectivamente.

Ejemplo. Hallar el error relativo del valor aproximado del número π, si se considera $\pi \approx 3{,}14$. Puesto que $3{,}141592\ldots$ es un valor más exacto de π, entonces $\alpha \approx 3{,}141592 - 3{,}14 = 0{,}001592 < 0{,}002$,

$$\Delta\, 3{,}14 = 0{,}002,$$

y

$$\delta_{3,14} = \frac{0{,}002}{3{,}14} = \frac{1}{1\,570} \approx 0{,}000637 \approx 0{,}064\%.$$

§ 4. Cifras significativas exactas

● DEFINICION. 1. Si el error absoluto del número aproximado no es mayor que la mitad de la unidad del orden de la última cifra, todas las cifras significativas del número dado se denominan *exactas*. Por ejemplo,

1) el número $A = 58{,}3$ tiene tres cifras significativas exactas si ΔA no es mayor que la mitad de una décima, es decir, $\Delta A \leqslant 0{,}05$.

2) El número $B = 0{,}032$ tiene dos cifras significativas exactas, si $\Delta B \leqslant 0{,}0005$ (la mitad de una milésima es igual a cinco diezmilésimas). Los ceros, que se encuentran delante la primera cifra significativa (3), nunca van en la cuenta de las cifras significativas exactas.

3) El número $C = 2{,}007$ tiene 4 cifras significativas exactas, si $\Delta C \leqslant 0{,}0005$. Aquí los ceros, que se encuentran entre las cifras significativas 2 y 7, también entran en la cuenta de las cifras significativas exactas.

Lo que respecta a la cifra 0, que se encuentra al final de la escritura del número aproximado, en ciertos casos los ceros van en la cuenta de las cifras exactas, y en otros, no.

4) El número 4123, redondeado hasta las centenas, será 4100 (escritura: $41 \cdot 10^2$); aquí los ceros no entran en la cuenta de las cifras significativas exactas, puesto que reemplazan las cifras exactas 2 y 3.

5) El número exacto 15,003, redondeado hasta la fracción centesimal, será 15,00 aquí ambos ceros van en la cuenta de las cifras exactas, puesto que en el número exacto no se tiene ni décimas ni centésimas.

● DEFINICION. 2. Si el error absoluto del número aproximado es mayor que la mitad de la unidad del orden de la última cifra de este número, la última cifra del número aproximado se denomina *dudosa* o *ambigua* (*incierta*).

Ejemplos. 1. $a = 42,3$; $\Delta a = 0,2$. La última cifra (3) es ambigua.
2. $b = 18,32$; si $\Delta b = 0,03$, la última cifra es ambigua; si $\Delta b = 0,005$, ella es cierta.
Como regla, en el número aproximado se conserva solamente una cifra ambigua, las demás se desprecian.
Observación. Hay que distinguir los términos «cifras significativas» y «signos decimales» lo que no es lo mismo:
1) el número aproximado 45,7 tiene tres cifras significativas y un signo decimal;
2) el número aproximado 0,0075 tiene dos cifras significativas y cuatro signos decimales.

§ 5. Operaciones con números aproximados

En los párrafos anteriores se mostraron distintos métodos de estimación de la exactitud de los números aproximados.
Ahora surge la siguiente pregunta: cómo realizar las operaciones aritméticas con los números aproximados de manera que los resultados de estas operaciones no contengan cifras ambiguas sobrantes.
Al operar con los números aproximados lo más sencillo es guiarse *por las reglas de cálculo de las cifras significativas.* En parte estas reglas se dan al estudiar Aritmética en la escuela primaria. Más adelante se formulan estas reglas y se dan ejemplos de su empleo.

§ 6. Reglas de cálculo de las cifras significativas

1. Al sumar y restar números aproximados en el resultado hay que conservar tantas cifras decimales, cuantas haya en el número aproximado con el menor número de cifras decimales.
2. Al multiplicar y dividir se conservan tantas cifras significativas, como tenga el menos exacto de los números dados. Entre varios números aproximados se considera el *menos exacto* aquel que tiene la menor cantidad de cifras significativas exactas.
3. Al elevar al cuadrado y al cubo, en el resultado se conservan tantas cifras significativas, como tiene la base de la potencia.
4. Al extraer la raíz cuadrada y cúbica, en el resultado hay que conservar tantas cifras significativas, como tiene el número subradical.

5. Al calcular los resultados intermedios se conserva una cifra excedente de reserva, la que en el resultado final se desprecia.

§ 7. Empleo de las reglas de cálculo de cifras

1. Suma y resta. 1) Hallar la suma de los números aproximados:

$1,7 + 4,35 + 5,124.$

El primer sumando (1,7) es el que tiene el menor número de cifras decimales; en los otros dos sumandos conservamos sólo una cifra decimal, la que en el resultado final se suprimirá: $1,7 + 4,35 + 5,12 = 11,17 \approx 11,2.$

2) Restar de 69,3 el número 4,856. Aquí el sustraendo tiene dos cifras decimales de más en comparación con el minuendo; hay que conservar sólo una cifra de más:

$$-\begin{array}{r} 69,30 \\ 4,86 \\ \hline 64,44 \end{array} \approx 64,4.$$

2. Multiplicación y división. 3) Calcular el área de una parcela de tierra de forma rectangular con lados $a = 31,5$ m, $b = 28,4$ m. Puesto que los factores tienen tres cifras significativas cada uno, en el producto se conservan también tres cifras significativas:

$S = 31,5 \cdot 28,4 = 894,60 \approx 895.$

4) $52,8 \cdot 0,32 = 16,896 \approx 17.$

El factor menos exacto (0,32) tiene dos cifras significativas; la misma cantidad de cifras se conserva en el producto.

5) De una parcela de 2,5 hectáreas se ha recogido 30,5 t de patatas. Determinar la cosecha media de una hectárea: $30,5 : 2,45 \approx 12,4$ (t).

3. Potenciación y radicación.

6) $(3,18)^2 \approx 10,1.$

La base tiene tres cifras significativas; igual cantidad de cifras hay que retener en el resultado de la elevación al cuadrado

7) $(0,132)^3 \approx 0,00230.$

8) $\sqrt{12,5} \approx 3,54.$

9) $\sqrt[3]{3,75} \approx 1,55.$

10) Calcular la velocidad de liberación (segunda velocidad cósmica) $v = \sqrt{2gR}$, es decir, la velocidad con la cual el proyectil, lanzado verticalmente, no vuelve a la Tierra.
$g = 981$ cm/s² es la aceleración de la gravedad,
$R = 63 \cdot 10^7$ cm es el radio de la Tierra,

$$v = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{10}} =$$
$$= 10^5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3} = 11{,}2 \cdot 10^5 \text{ (cm/s)},$$

o bien

$v = 11{,}2$ km/s.

Observación. Al resolver los ejemplos 6, 7, 8, 9 y 10 se utilizaron las «Tablas matemáticas de cuatro cifras» de Bradis.

§ 8. Ejemplos de cálculos más complejos según la regla de cálculo de cifras significativas

E j e m p l o 1. La capacidad térmica de un cuerpo sólido x se determina por la fórmula

$$x = \frac{(m_2 - m_1 + m_1 n)(t_2 - t_1)}{P(T - t_2)},$$

donde m_1 es el peso del recipiente interior sin agua; m_2, el peso del recipiente interior con agua; t_1, la temperatura inicial del agua; t_2, la temperatura del agua después de sumergir el cuerpo; T, la temperatura de ebullición del agua; n, la capacidad térmica del calorímetro y del agitador; P, el peso del cuerpo, cuya capacidad térmica se debe hallar.
Del experimento se han obtenido los siguentes datos:
$P = 403{,}7$; $m_1 = 119$; $m_2 = 673$; $n = 0{,}094$; $t_1 = 9{,}5$; $t_2 = 12{,}8$; $T = 100{,}11$.
En este ejemplo, las magnitudes n y t_1 tienen en total dos cifras significativas exactas, por eso redondeamos previamente los datos más exactos, conservando en ellos tres cifras significativas: $P = 404$; $T \approx 100$; los cálculos intermedios los realizamos con tres cifras significativas, en el resultado final conservamos dos cifras significativas.
Sustituimos los valores numéricos en la fórmula:

$$x = \frac{(673 - 119 + 119 \cdot 0{,}094)(12{,}8 - 9{,}5)}{404(100 - 12{,}8)} = \frac{(554 + 119 \cdot 0{,}094) \cdot 3{,}3}{404 \cdot 87{,}2}.$$

Calculamos:

$$119 \cdot 0{,}094 = 11{,}186 \approx 11{,}2,$$

$554 + 11,2 = 565,2 \approx 565,$

$565 \cdot 3,3 = 1864,5 \approx 186 \cdot 10,$

$404 \cdot 87,2 = 35228,8 \approx 35\,200 = 352 \cdot 10^2,$

$$\frac{186 \cdot 10}{352 \cdot 10^2} = \frac{186}{352 \cdot 10} = \frac{18,6}{352} \approx 0.0528 \approx 0,053.$$

Respuesta: $x = 0,053.$

Ejemplo 2. En un circuito de corriente alterna hay conectados un condensador y una bobina. La impedancia de este circuito se determina por la fórmula

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

donde R es la resistencia del circuito exterior; $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, la reactancia.

Calcular Z, si $R = 41,4$; $\omega = 0,75$; $L = 18$; $C = 0,52$.

Los datos menos exactos tienen dos cifras significativas, por eso, en el resultado final conservamos sólo dos cifras; los cálculos intermedios los realizamos con tres cifras significativas:

1) $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,75 \cdot 18 - \frac{1}{0,75 \cdot 0,52} \approx 13,5 - 2,56 \approx 10,9,$

2) $(10,9)^2 = 118,81 \approx 119,$

3) $41,4^2 \approx 1714 \approx 171 \cdot 10,$

4) $119 + 1710 = 1829 \approx 183 \cdot 10,$

5) $\sqrt{1830} \approx 42,8 \approx 43$ (ohmios).

§ 9. Cálculos con la exactitud dada a priori

En los cálculos prácticos frecuentemente se debe resolver el siguiente problema: ¿con qué exactitud hay que tomar los datos iniciales para que el error del resultado final no supere el límite dado a priori?

Veamos dos ejemplos:

1. El período de una oscilación completa T de un péndulo se determina por la fórmula $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, donde l es la longitud del péndulo (cm); g, la aceleración de la gravedad (cm/s^2).

¿Con qué exactitud hay que medir la longitud l y con cuantas cifras significativas hay que tomar los números π y g,

para que el error relativo no supere el medio por ciento (0,5%) al calcular el período T?
La longitud del péndulo es $l \approx 80$ cm. Determinamos el orden de la magnitud T, es decir, el orden decimal de la primera cifra de la izquierda (decenas o unidades), para lo cual tomamos en cuenta solamente la primera cifra de cada uno de los números redondeados π y g ($\pi \approx 3$; $g \approx 1000$):

$$T \approx 2\cdot 3\cdot \sqrt{\frac{80}{1000}} \approx 6\cdot 0{,}28 \approx 1{,}7;$$

en tal caso el 0,5% de $1{,}7 = 0{,}005\cdot 1{,}7 = 0{,}0085$.
Según el error relativo hemos hallado el límite del error absoluto: $\Delta T = 0{,}0085$. Según la magnitud del error absoluto admisible se puede juzgar respecto a que el período debe tener tres cifras significativas, y, por eso, la longitud l debe expresarse por un número aproximado con tres cifras significativas, es decir, debe ser medida con una exactitud de hasta décimas de centímetro. El número π conviene tomarlo con cuatro cifras significativas, es decir, con una cifra de reserva (con exceso), el número g, con tres cifras significativas (981), los cálculos intermedios se realizan con cuatro cifras, en el resultado final se conservan tres cifras significativas.
1. ¿Con qué exactitud hay que medir los catetos a y b del triángulo rectángulo para que se pueda calcular la hipotenusa $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ con un error relativo δ_c no superior al 2%?
Supongamos que $a \approx 50$ cm, $b \approx 80$ cm. Cada uno de los números aproximados 50 y 80 tiene una cifra significativa exacta. Hallamos el valor aproximado de la hipotenusa:

$$c = \sqrt{50^2 + 80^2} = \sqrt{100\,(25 + 64)} = 10\sqrt{89} \approx$$
$$\approx 10\cdot 9{,}4 = 94;$$

el 2% de $94 = 94\cdot 0{,}02 = 1{,}88 \approx 2$.

De este modo, el error absoluto es $\Delta c = 2$ (cm). Esto significa que la cifra, que indica el número de unidades en el resultado final, es ambigua, por eso, los catetos a y b hay que tomarlos con dos cifras significativas exactas, es decir, medir con la precisión de hasta 0,5 cm. Los cálculos intermedios hay que realizarlos con tres cifras significativas, mientras que el valos obtenido de la hipotenusa c debe ser redondeado hasta dos cifras significativas.

▲ **Ejercicios**

1. Redondear el número 2,7182818 hasta 5, 4, 3 cifras significativas.
2. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el polo es igual a 6356,909 km. Redondear este número hasta 2, 3, 4 cifras significativas.
3. ¿Qué diferencia hay entre el registro de la temperatura 18° y 18,0°?
4. Trazar exactamente un rectángulo y medir sus lados con una precisión de hasta 1 mm. Escribir, utilizando las cifras de la desigualdad, entre qué números está comprendido el largo de sus lados.
5.. El valor aproximado de la magnitud x está comprendido entre 6,85 m y 6,89 m. ¿Con qué exactitud se ha medido?
6. Convertir la fracción $5\frac{2}{7}$ en una decimal con la exactitud de hasta 0,001.
7. Al pesar un cuerpo se obtiene el peso de 18,7 kg con la exactitud de hasta 0,1 kg. Indicar el límite del valor exacto del peso.
8. Hallar en tantos por cientos el error relativo del número 3.14.
9. ¿Cuál de las dos mediciones es más exacta:

1) 895 m ($\pm 0{,}5$ m); 2) 24,08 m ($\pm 0{,}01$ m)?

10. ¿Cuál de los dos valores aproximados del número π es más exacto:

3,14 ó $3\frac{1}{7}$?

11. Escribir el número 18,754 sin cifras excedentes, sabiendo que su error relativo es igual a $\frac{1}{2}$%.
12. Hallar la suma $2\frac{3}{7}+\frac{1}{15}+4\frac{1}{3}$ con tres cifras decimales exactas.
13. La distancia entre dos ciudades, según el mapa, es igual a 24,6 cm ($\pm 0{,}2$ cm). Hallar la distancia verdadera entre las ciudades si la escala del mapa es 1 : 2 500 000; determinar el error.
14. La cubatura de una habitación es de 127,4 m^3. ¿Cuánto pesa el aire contenido en esa habitación si el peso de 1 m^3 es igual a 1,29 kg ($\pm 0{,}01$ kg)?
15. ¿Cuántas cifras significativas exactas se puede determinar en el producto de los números aproximados $2{,}18 \cdot 0{,}65 \times 0{,}175$? Calcular estas cifras.
16. Hallar el volumen de una habitación si sus medidas son $15{,}4 \cdot 12{,}6 \cdot 4{,}5$. ¿Cuál es el error relativo del producto?
17. Para determinar el peso específico de un cuerpo se estableció que su peso es de 117,8 g; al sumergirlo en el agua el cuerpo desalojó 54,7 cm^3. ¿Con qué exactitud se puede determinar el peso específico del cuerpo?
18. ¿Con qué error relativo se puede calcular el volumen de un cilindro si el radio de la base es $r = 15{,}4$ cm, la altura $H = 28{,}2$ cm?
19. De una superficie de 32,4 hectáreas se ha recogido 4580 quintales métricos de centeno. ¿Qué promedio de quintales métricos se ha recogido por hectárea?
20. El valor aproximado del radio de un cilindro es de 20 cm, la altura, de 30 cm. ¿Con qué exactitud se debe medir para que el error relativo al calcular el volumen no supere el 1%?

CAPITULO II

ECUACIONES DEL PRIMER GRADO

§ 10. Conceptos generales y definiciones

● DEFINICION 1. Se denomina *ecuación* la igualdad que contiene una o varias letras, bajo las cuales se sobreentienden los números incógnitos.
Las letras, que designan los números incógnitos, se denominan simplemente *incógnitas.*

Ejemplos. 1) La igualdad $3a + 7 = 5a - 9$ es una ecuación con una incógnita a; ella se satisface solo cuando $a = 8$.
2) La igualdad $x + 2y^2 = 13$ es una ecuación con dos incógnitas x e y; ella se satisface, por ejemplo, si $x = 5$ e $y = 2$.
Generalmente las incógnitas se designan con las últimas letras del abecedario latino $x, y, z, u, v, \ldots$
En lugar de la frase «la ecuación se satisface para $x = 1$; $y = 2$», con más frecuencia se admite decir que la ecuación se satisface para los valores de las incógnitas $x = 1$, $y = 2$.

● DEFINICION 2. Los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación dada, se denominan sus *soluciones.*
Si la ecuación contiene sólo una incógnita, generalmente su solución se denomina *raíz de la ecuación.*

Ejemplos. 1) La ecuación $3x^2 = 2x + 1$ tiene las raíces $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = 1$, lo que se puede verificar fácilmente.
2) Una de las soluciones de la ecuación $3x + y = 5$ es el par de números $x = 1$, $y = 2$.
3) La solución de la ecuación con tres incógnitas $x + y + 2z = 10$ es, por ejemplo, el trío de números: $x = 1$, $y = 3$, $z = 3$.

● DEFINICION 3. *Resolver* una ecuación o un sistema de acuaciones significa hallar todas las soluciones, es decir, todos los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación o al sistema dado (o sea, a cada ecuación del sistema), o asegurarse de que no existen tales valores de las incógnitas.

E j e m p l o. La ecuación $x - 3 = x + 1$ no tiene raíz, puesto que para cualquier valor de la incógnita siempre el primer miembro de la ecuación no es igual al segundo. En función del número de incógnitas de la ecuación, existen ecuaciones con una, dos y más incógnitas.

● DEFINICION 4. La ecuación con una incógnita se denomina *algebraica* si ella se puede reducir de manera que su primer miembro es un polinomio con respecto a la incógnita, y el segundo miebro sea igual a cero. Tal tipo de ecuación se denomina *normal*. El mayor exponente de la incógnita del primer miembro de la ecuación normal se denomina *grado* de la ecuación algebraica.
Así, por ejemplo, las ecuaciones: $3x + 5 = 0$, $5x^2 - 8x - 20 = 0$, $x^4 - 8x^3 - 29 = 0$ son ecuaciones algebraicas, respectivamente de primer, segundo y cuarto grado.
En adelante para abreviar vamos a omitir la palabra «algebraica»; esto no dará lugar a equivocación, ya que nos referiremos solamente a las ecuaciones algebraicas.
Se denominan *coeficientes* de una ecuación los factores numéricos o literales de las incógnitas, así como el término independiente, es decir, el término que no contiene incógnitas. Corrientemente se habla de coeficientes de una ecuación reducida a la forma normal.

E j e m p l o s. 1. La ecuación $2x^2 - 5x - 10 = 0$ es una ecuación de segundo grado con coeficientes numéricos (los coeficientes son: 2, -5 y -10); aquí el número -10 es el termino independiente.

2. La ecuación $\frac{a}{x} = bx^3 + 1$ es una ecuación de tercer grado con coeficientes b, 0, 1 y $-a$ (compruébelo Ud. mismo).

● DEFINICION 5. Dos ecuaciones con iguales incógnitas se denominan *equivalentes* si todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda e, inversamente, todas las soluciones de la segunda ecuación sirven también de soluciones de la primera o si ambas ecuaciones no tienen solución.

E j e m p l o s. 1. Las ecuaciones $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=14$ y $5x-36=2x$ son equivalentes, puesto que ambas ecuaciones se satisfacen solamente para $x=12$.
2. Las ecuaciones $2x-3=7$ y $(2x-3)(x+1)=7(x+1)$ no son equivalentes; la primera de ellas tiene una sola raíz $x=5$, y la segunda, además de la raíz $x=5$ tiene también la raíz $x=-1$, que no resuelve la primera ecuación.
3. Las ecuaciones $x+5=x-1$ y $x(x-3)=x^2+8-3x$ son equivalentes, ya que ambos no tienen solución.
Al resolver una ecuación debemos realizar una serie de transformaciones, hasta tanto no se haya obtenido la ecuación simple de tipo $x=a$ ó un conjunto de tales ecuaciones. Surge la pregunta: ¿no puede ocurrir que como resultado de las transformaciones realizadas se obtenga una nueva ecuación no equivalente a la ecuación inicial?
Enunciamos dos teoremas sobre equivalencia de las ecuaciones sin demostración *).

T e o r e m a 1. *Si a ambos miembros de una ecuación agregamos un mismo número o un mismo polinomio con respecto a la incógnita la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

T e o r e m a 2. *Si ambos miembros de una ecuación se multiplica (o se divide) por un mismo número, distinto de cero, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

Del teorema 1 se deduce una importante consecuencia: cualquier término de una ecuación puede pasarse de un miembro a otro, cambiando su signo por el contrario.
En efecto, supongamos que el segundo miembro de una ecuación contiene el término A (A puede ser un número o un polinomio con respecto a la incógnita). Si agregamos a ambos miembros de la ecuación la magnitud $-A$, en el segundo miembro los términos A y $-A$ se eliminan, y en el primer miembro aparece el término $-A$. Por lo tanto, puede pasarse cualquier término de la ecuación del segundo al primer miembro, cambiando su signo por el contrario.
De igual modo se puede razonar con respecto a cualquier término que se encuentra en el primer miembro de una ecuación. Veamos algunos ejemplos de resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

E j e m p l o 1. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3.$

*) Las demostraciones de estos teoremas se dan en el § 79.

Sin saber a qué es igual la raíz de la ecuación se puede afirmar que la raíz buscada, a ciencia cierta, no es ni el número -2, ni el número -3; en caso contrario el primer miembro de la ecuación no tendría sentido (no se puede dividir por cero). Pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos las fracciones a un común denominador:

$$\frac{5(x-2)(x+3)-2(x-3)(x+2)-3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Después de simplificar el numerador del primer miembro obtenemos

$$\frac{-4(2x+9)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Puesto que la fracción es igual a cero sólo cuando su numerador es igual a cero (el denominador no es igual a cero), $4(2x+9)=0$, de donde $x=-\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2. $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a+b}+\frac{a+b-1}{2(a-b)}=\frac{x}{a-b}+1.$

En esta ecuación x es la incógnita, a y b son magnitudes conocidas.

La igualdad escrita tiene sentido si ninguno de los denominadores de las fracciones es igual a cero; por lo tanto, $a \neq \neq \pm b$. Vamos a simplificar sucesivamente la ecuación dada:

$$\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)x=1-\frac{a+b-1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+2(a-b)-a-b}{a^2-b^2}x=\frac{2(a-b)-a-b+1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+a-3b}{a^2-b^2}x=\frac{a-3b+1}{2(a-b)}.$$

Si $1+a-3b\neq 0$, dividiendo ambos miembros por $1+ +a-3b$, obtenemos:

$$\frac{1}{a^2-b^2}x=\frac{1}{2(a-b)}, \quad x=\frac{a+b}{2}.$$

Si $1+a-3b=0$, la ecuación se satisface para cualquier valor de x.

§ 11. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y su solución gráfica

Toda ecuación de primer grado con una incógnita puede reducirse a la forma $ax+b=0$. El primer miembro de esta ecuación es un polinomio de primer grado respecto a x, deno-

minado también *función lineal*, y el segundo miembro es igual a cero.

Está claro que:

1) si $a \neq 0$, la raíz de la ecuación es igual a $-\frac{b}{a}$;

2) si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación no tiene raíz;

3) si $a = b = 0$, la solución de la ecuación es un número cualquiera; en este caso la ecuación se denomina *indeterminada*.

Supongamos dada la ecuación $2x - 3 = \frac{3}{2}x + 1$. El primero y segundo miembros de esta ecuación son funciones lineales. Para resolver esta ecuación hay que hallar un valor tal de x, con el cual ambas funciones son numéricamente iguales. Partiendo de este razonamiento de la ecuación (a propósito, es muy fructífero, lo que se demostrará más edelante) se impone de por sí el siguiente método de resolución:

1) Trazamos las gráficas de las funciones lineales $y = 2x - 3$ e $y = \frac{3}{2}x + 1$, que son, como se sabe, líneas rectas *).

2) La abscisa del punto M; es decir, el punto de intersección de las rectas (fig. 1), es la raíz de la ecuación dada, ya que a esta abscisa le corresponden iguales ordenadas de los puntos de ambas rectas, o sea, para estos valores de la abscisa x ambos miembros de la ecuación son iguales. De la fig. 1 se aprecia que la abscisa del punto de intersección de las rectas, es decir, la raíz de la ecuación, es $x = 8$.

También se podía haber procedido de otro modo: al principio se podía reducir la ecuación dada a la forma $x - 8 = 0$. En tal caso, la raíz buscada es un valor tal del argumento x, para la cual la función $y = x - 8$ es igual a cero. Este valor del argumento es la abscisa del punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas (fig. 2).

Cabe hacer notar que el último método no es tan interesante como el método de resolución independiente (en efecto, reduciendo la ecuación inicial a la forma $x - 8 = 0$, de hecho lo hemos resuelto), sin embargo, es útil para analizar las ecuaciones de primer grado, dadas en forma general (normal):

$$ax + b = 0.$$

---

*) Los conceptos de función y de gráfica serán examinados con mayor detalle en el cap. VI.

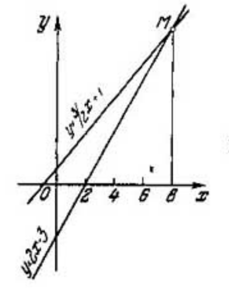


Fig. 1.

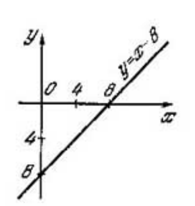


Fig. 2.

Precisamente, los tres casos posibles de disposición de la recta

$y = ax + b$

respecto al eje de abscisas (la recta interseca al eje, es paralela a ella, coincide con ella) dan la interpretación geométrica de los tres casos posibles de solución de la ecuación $ax + b = 0$ (la ecuación tiene una sola solución, no tiene ninguna solución, tiene infinitas soluciones).

§ 12. Sistema de ecuaciones lineales

Se denomina *ecuación lineal* (ecuación de primer grado) *con dos incógnitas* la ecuación de tipo

$ax + by = c.$

Se aprecia fácilmente que esta ecuación tiene infinitas soluciones, puesto que a una de las incógnitas, por ejemplo a x, se le puede dar valores arbitrarios, y el valor de la incógnita y correspondiente a éste se halla de la ecuación.
Por ejemplo, si la incógnita x de la ecuación $2x - y = 3$ se hace igual a -1, 0, 2, 5, los valores correspondientes de y serán -5, -3, 1, 7. Cada par de números $(-1; -5)$, $(0; -3)$, $(2; 1)$, $(5; 7)$ es la solución de la ecuación dada. Tales pares de números son infinitos. Por eso, se dice que una ecuación de primer grado con dos incógnitas es indeterminada.
Esta indeterminación se interpreta fácilmente de manera gráfica. A la ecuación $2x - y = 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares corresponde una

recta. Esta recta es la gráfica de la función lineal $y = 2x - 3$, representada en la fig. 1.

Las coordenadas de cualquier punto de una recta son las soluciones de la ecuación; pero, teniendo en cuenta que los puntos de una recta son infinitos, también las soluciones son infinitas.

El conjunto de dos ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

forma un *sistema de ecuaciones lineales* con dos incógnitas. El par de números x_0, y_0, que satisfacen a cada ecuación del sistema se denomina su *solución*.

Antes de resolver tal sistema en forma general, recordemos los métodos de resolución de los sistemas lineales con coeficientes numéricos.

§ 13. Método de adición algebraica

E j e m p l o. 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y = 14, \\ 3x - 4y = 24. \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por 2, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 10x + 4y = 28, \\ 3x - 4y = 24, \end{cases}$$

equivalente al dado. Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos $13x = 52$, de donde $x = 4$. Sustituimos el valor hallado de x en la primera ecuación y hallamos $y = -3$.

Así, pues, el sistema tiene una sola solución $x = 4$; $y = -3$.

E j e m p l o 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 7a + 3b = 8, \\ 5a + 2b = 5{,}5. \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por 2, y la segunda por -3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 14a + 6b = 16, \\ -15a - 6b = -16{,}5, \end{cases}$$

equivalente al dado. Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos $-a = -0,5$, de donde $a = 0,5$. A continuación, sustituyendo el valor hallado de a en una de las ecuaciones del sistema, hallamos $b = 1,5$.
De los ejemplos expuestos se deduce que las ecuaciones del sistema dado siempre se pueden convertir de manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean de signo distinto, en tal caso, sumando miembro a miembro las ecuaciones dadas obtenemos una ecuación con una incógnita.

§ 14. Método de sustitución

Frecuentemente se utiliza el siguiente método de resolución del sistema: expresamos una incógnita de una de las ecuaciones por otra y la sustituimos en la segunda ecuación del sistema, lo que da lugar a una ecuación con una incógnita. Este método de resolución del sistema se ha denominado *método de sustitución*.

E j e m p l o 1.

$$\begin{cases} 5x+2y=14, \\ 3x-4y=24. \end{cases}$$

De la primera ecuación expresamos y por x:

$$y=7-\frac{5}{2}x. \quad (1)$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y por la expresión $7-\frac{5}{2}x$:

$$3x-4\left(7-\frac{5}{2}x\right)=24.$$

De donde $x = 4$, por lo cual de la igualdad (1) obtenemos $y = -3$.
Con el método de sustitución se prefiere resolver los sistemas con coeficientes literales.

E j e m p l o 2.

$$\begin{cases} ax+y=c, \\ x+by=m \end{cases}$$

(todos los coeficientes son distintos de cero y $ab \neq 1$).
De la primera ecuación hallamos $y = c - ax$. La sustitución

de la incógnita y, en la segunda ecuación, por $c - ax$ conduce a una ecuación con una incógnita

$$x + b(c - ax) = m,$$

de donde $x = \frac{m - bc}{1 - ab}$.

Conociendo el valor de x, de la igualdad $y = c - ax$ se halla fácilmente y.

§ 15. Resolución de un sistema lineal mediante determinantes

Supongamos dado un sistema lineal con coeficientes literales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad (b_1 \neq 0), \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Se requiere hallar su solución.

De la primera ecuación expresamos y por x:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}. \tag{1}$$

Este valor de y lo sustituimos en la segunda ecuación:

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2.$$

Obtenemos una ecuación con una incógnita (x), la que se reduce a la forma

$$a_2b_1x - a_1b_2x = b_1c_2 - b_2c_1$$

o bien

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1. \tag{2}$$

Si el coeficiente de x, es decir, la expresión $a_2b_1 - a_1b_2$, es distinto de cero, ambos miembros de la igualdad (2) se pueden dividir por él; así, obtenemos:

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{3}$$

Después de sustituir en la igualdad (1) x por su valor de la igualdad (3), hallamos:

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{4}$$

El sistema dado tiene una sola solución si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, además, los valores de las incógnitas se calculan por las fórmulas (3) y (4).

Observemos que los denominadores de las fracciones, que representan los valores de las incógnitas, son iguales. Este común denominador es igual a $a_1b_2 - a_2b_1$; está compuesto sólo de los coeficientes de las incógnitas x e y. Escribimos estos coeficientes en el orden con que fueron dadas las ecuaciones del sistema, omitiendo las incógnitas, y los disponemos en forma de tabla cuadrada; obtenemos:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 \\ a_2\ b_2 \end{matrix} \quad (5)$$

Si se multiplican los coeficientes, ubicados en las diagonales del cuadrado, y del producto de los números, dispuestos en la diagonal, que va del ángulo superior izquierdo hacia el inferior derecho, se resta el producto de los números de la otra diagonal, obtenemos la expresión $a_1b_2 - a_2b_1$; ésta se denomina *determinante* del sistema de ecuaciones lineal dado y se designa del siguiente modo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (6)$$

En general, para la matriz de tipo (5), compuesta de cuatro números arbitrarios (que no son indefectiblemente coeficientes del sistema), la expresión análoga a (6) se denomina *determinante de segundo orden.*

Conviene hacer notar, que para aprender regla de cálculo del determinante es cómoda su siguiente representación esquemática:

$$\overset{+}{}\overset{-}{}\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{vmatrix}$$

E j e m p l o

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4(-5) = 44.$$

Los numeradores de las fracciones, que determinan los valores de las incógnitas en las igualdades (3) y (4), también son determinantes de segundo orden:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

El determinante Δ_x se ha obtenido del determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sustituyendo los números de la primera columna por los términos independientes; y el determinante Δ_y se ha obtenido sustituyendo los números de la segunda columna por los términos independientes.

Ahora se puede escribir de modo abreviado la solución del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

en la forma $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 7x - 3y = 24. \end{cases}$$

Formamos el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3) - 5\cdot 7 = -9 - 35 = -44.$$

Este no es igual a cero, y, por eso, el sistema tiene una solución única. Calculamos los dos determinantes restantes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 24 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3) - 5\cdot 24 = -132,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 24 \end{vmatrix} = 3\cdot 24 - 4\cdot 7 = 44.$$

A continuación hallamos los valores de las incógnitas

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-132}{-44} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{44}{-44} = -1.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a + b, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a. \end{cases}$$

Formemos el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)\,b} - \frac{1}{(a-b)\,a} = \frac{a^2-b^2-2ab}{ab\,(a+b)\,(a-b)}.$$

Para la existencia de Δ es necesario que el denominador de esta fracción no sea igual a cero, es decir, que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq \pm b$; en este caso $\Delta \neq 0$, si

$$a^2 - b^2 - 2ab \neq 0.$$

Calculemos los determinantes Δ_x y Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+b & \frac{1}{a-b} \\ 2a & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{a+b}{b} - \frac{2a}{a-b} = \frac{a^2-b^2-2ab}{b\,(a-b)},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & a+b \\ \frac{1}{a} & 2a \end{vmatrix} = \frac{2a}{a+b} - \frac{a+b}{a} = \frac{a^2-b^2-2ab}{a\,(a+b)}.$$

Hallamos los valores de las incógnitas:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = a\,(a+b), \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = b\,(a-b).$$

Sustituyendo los valores hallados de las incógnitas en cada ecuación del sistema dado nos convencemos de la corrección de la solución; esta verificación se puede realizar mentalmente.

§ 16. Sistema lineal cuyo determinante es igual a cero

Supongamos que el determinante del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

es igual a cero:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0;$$

en tal caso, $a_1b_2 = a_2b_1$, de donde $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, es decir, si el determinante del sistema es igual a cero, los coeficientes de las incógnitas son proporcionales.

Inversamente: si los coeficientes de las incógnitas son pro-

porcionales, el determinante del sistema es igual a cero. En efecto, de $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ se deduce que $a_1b_2 = a_2b_1$ ó

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$

Supongamos, ahora, que siquiera uno de los determinantes Δ_x o Δ_y también es igual a cero.
Digamos que $\Delta_x = 0$: $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, lo que da lugar a la proporción: $\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.
Observación. Nosotros suponemos que los coeficientes a_2, b_2 y c_2 no son iguales a cero. En caso contrario los razonamientos anteriores perderían su sentido, puesto que no es posible dividir por cero. En el caso de que cualesquiera de los coeficientes sean iguales a cero el sistema se simplifica. Por ejemplo, de $a_2 = 0$ se deduce que $a_1b_2 = a_2b_1 = 0$. En ese caso, o bien $b_2 = 0$ (desaparece la segunda ecuación), o bien $a_1 = 0$ (desaparecen todos los términos que contienen x).
De este modo, de que $\Delta = 0$ y $\Delta_x = 0$, se deduce la proporcionalidad de los coeficientes para iguales incógnitas y términos independientes:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \qquad (1)$$

(es decir, Δ_y también es igual a cero).
Designemos la magnitud de cada una de las tres relaciones iguales por k ($k \neq 0$):
por lo tanto,

$$\frac{a_1}{a_2}=k,\quad \frac{b_1}{b_2}=k,\quad \frac{c_1}{c_2}=k;$$

por lo tanto,

$$a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2,\ c_1 = kc_2. \qquad (2)$$

Después de sustituir los coeficientes de la primera ecuación por sus expresiones de las igualdades (2) el sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Si simplificamos todos los términos de la primera ecuación con respecto al factor k, resulta que el sistema dado está compuesto de dos ecuaciones idénticas, es decir, una ecuación es consecuencia de la otra. En otras palabras, tenemos una ecuación con dos incógnitas. Como se indicó antes, una ecua-

ción con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. En este caso se dice que el sistema es *indeterminado*.

Ejemplo.

$$\begin{cases} 4x+6y=3, \\ 6x+9y=4{,}5. \end{cases}$$

Tendremos:

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{3}{4{,}5}\quad\left(k=\frac{2}{3}\right).$$

Aquí los coeficientes de las incógnitas idénticas y los términos independientes son proporcionales; si se multiplican ambos miembros de la primera ecuación por $\frac{3}{2}$ $\left(\text{o los de la segunda ecuación por } \frac{2}{3}\right)$, ésta coincide con la segunda (o con la primera).

El sistema tiene la misma solución que una de las ecuaciones del sistema dado.

Veamos ahora el caso en que $\Delta=0$, pero $\Delta_x \neq 0$ (entonces también $\Delta_y \neq 0$). Convirtiéndose en cero el determinante del sistema, se deduce que $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Si $\Delta_x \neq 0$, entonces $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Como antes designamos cada una de las dos relaciones $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ por k ($k \neq 0$), en tal caso, $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. La relación $\frac{c_1}{c_2}$ la designamos por m, donde $m \neq k$. Siendo así, $c_1 = mc_2$.

En la primera ecuación del sistema sustituimos los coeficientes a_1 por ka_2, b_1 por kb_2 y el término independiente c_1 por mc_2. El sistema toma la forma

$$\begin{cases} (a_2x+b_2y)\,k=c_2m \quad (k \neq m), \\ \quad a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por k, tendremos $(a_2x + b_2y)\,k = c_2k$.

Luego tendremos que $c_2m = c_2k$, es decir, $m = k$ (se puede dividir por c_2 puesto que supusimos que $c_2 \neq 0$). Pero, en realidad $m \neq k$. De la contradicción obtenida se deduce que el sistema no tiene solución.

En este caso se dice que el sistema de ecuaciones es *incompatible o contradictorio*.

Ejemplo.

$$\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 4x-6y=5. \end{cases}$$

Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\left(=\frac{1}{2}\right).$$

Los términos independientes no son proporcionales á los coeficientes:

$$\frac{2}{4}\neq\frac{4}{5}.$$

El primer miembro de la segunda ecuación se ha obtenido del primer miembro de la primera multiplicándola por 2, mientras que el segundo miembro se ha obtenido del segundo miembro de la primera ecuación multiplicándola por $\frac{5}{4}$. El sistema es incompatible y no tiene soluciones.

Observación. Si, sin reflexionar sobre la estructura del sistema dado, se resuelve éste, por ejemplo, por el método de suma algebraica, llegamos a una solución absurda: $0 = 3$, puesto que ambas incógnitas se eliminan inmediatamente.

Resumamos lo que se dijo sobre la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

a) Si el determinante del sistema $\Delta\neq 0$, el sistema es determinado, es decir, tiene solución única.

b) Si $\Delta = 0$ y $\Delta_x = 0$, el sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

c) Si $\Delta = 0$ y $\Delta_x \neq 0$, el sistema es incompatible y no tiene soluciones.

A cada uno de los tres casos examinados se le puede dar una interpretación geométrica, partiendo de que en el sistema de coordenadas rectangulares a cada ecuación lineal (de primer grado), con dos incógnitas (es mejor decir con dos variables) corresponde una recta.

a) Si $\Delta\neq 0$, dos rectas, representadas por las ecuaciones del sistema, se cortan en un punto; las coordenadas del punto de intersección representan precisamente la solución del sistema.

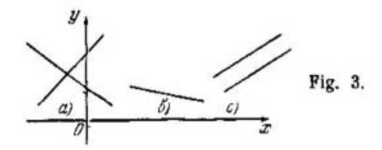


Fig. 3.

b) Si $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, las dos rectas correspondientes a las ecuaciones se confunden en una recta común; dado que éstas tienen infinitos puntos comunes, en consecuencia, el sistema también tiene infinitas soluciones.
c) Si $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema, son paralelas, es decir, no tienen ningún punto común, por lo cual el sistema no tiene soluciones.
En la fig. 3 se muestran estos tres casos posibles.

§ 17. Casos particulares de sistemas lineales

Hasta ahora examinamos sistemas de ecuaciones lineales, en los que el número de inógnitas ha sido igual al número de ecuaciones, que componen el sistema. Sin embargo, en las aplicaciones de la matemática a otras ciencias ocurren casos en que las ecuaciones, que entran en el sistema, son más que las incógnitas (tales sistemas se denominan *sobredeterminados*), o, por el contrario, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones del sistema. Los métodos de resolución de estos sistemas se examinan en una serie de ejemplos.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5, \\ 5x-3y=9. \end{cases}$$

Al principio resolvemos el sistema compuesto de las dos primeras ecuaciones,

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$$

hallamos $x = 3$; $y = 2$. Sustituimos estos valores de las incógnitas en la tercera ecuación y verificamos que se obtiene

la identidad $9 = 9$. Por lo tanto, el sistema dado tiene solución única.

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \\ 2x+y=12. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene soluciones, puesto que resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \end{cases}$$

hallamos $x=5$, $y=1$, pero estos valores de las incógnitas no satisfacen a la tercera ecuación $2x+y=12$.

Ejemplo 3. ¿Cómo debe ser la dependencia entre a y b para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7, \\ ax+by=5b \end{cases}$$

tenga una solución única?

Al principio resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7 \end{cases}$$

y hallamos que $x=2$, $y=1$.

Sustituyendo estos valores de las incógnitas en la tercera ecuación, tendremos:

$2a+b=5b$ ó $a=2b$.

A continuación examinemos el sistema *homogéneo*, es decir, el sistema en el que el término independiente de cada una de las ecuaciones es igual a cero.

Ejemplo 4.

$$\begin{cases} 2x-y-5z=0, \\ 3x+2y-11z=0. \end{cases}$$

Es evidente que todo sistema homogéneo (no indefectiblemente lineal) tiene solución nula: $x=y=z=0$. Ahora, buscaremos soluciones diferentes de la solución nula.

Supongamos que $z \neq 0$. En tal caso todos los términos de las ecuaciones se pueden dividir por z; así, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = 5, \\ 3\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z} = 11. \end{cases}$$

Suponiendo que

$$\frac{x}{z} = u, \quad \frac{y}{z} = t,$$

tendremos:

$$\begin{cases} 2u - t = 5, \\ 3u + 2t = 11, \end{cases}$$

de donde $u = 3$, $t = 1$.
A continuación,

$$\frac{x}{z} = 3, \quad \frac{y}{z} = 1,$$

o bien

$$x = 3z, \quad y = z,$$

donde z puede adquirir cualquier valor. Por ejemplo, para $z = 2$ tendremos que

$$x = 6; \ y = z = 2.$$

De este modo, el sistema lineal dado tiene infinitas soluciones obtenidas de las igualdades

$$x = 3z, \quad y = z,$$

si a la incógnita z se le da cualquier valor. En el caso particular, cuando $z = 0$ tendremos una solución nula.

E j e m p l o 5.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ 2x - 2y - 5z = 0. \end{cases}$$

Al buscar soluciones distintas de cero, aquí no se puede suponer que $z \neq 0$, puesto que después de dividir por z e introducir las incógnitas auxiliares obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u - t = -3, \\ 2u - 2t = 5, \end{cases}$$

que es contradictorio y no tiene soluciones. En tal caso, dividiremos por x (o por y), considerando $x \neq 0$, lo que en las nuevas incógnitas $\left(\frac{y}{x} = u,\ \frac{z}{x} = t\right)$ nos da el sistema

$$\begin{cases} -u + 3t = -1, \\ -2u - 5t = -2. \end{cases}$$

Resolviéndola, hallamos que
$u = 1,\ t = 0$

o bien

$$\frac{y}{x} = 1,\ \frac{z}{x} = 0.$$

Por suposición $x \neq 0$, y por eso, $z = 0$ e $y = x$.
El sistema homogéneo dado tiene infinitas soluciones, distintas de cero. Cada solución es un trio de números, en el que los dos primeros números son idénticos, y el tercero es 0; por ejemplo, (3; 3; 0) ó (—5; —5; 0); etc.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Se aprecia inmediatamente que la segunda ecuación es corolario de la primera, puesto que después de dividir por 2 todos los términos de la segunda ecuación se obtiene un sistema de dos ecuaciones idénticas

$$x + 2y - z = 0, \qquad (1)$$

ó

$$x = z - 2y.$$

Las dos incógnitas y y z pueden tomar cualquier valor; los valores de x se determinan por los valores prefijados de y y z de las fórmulas (1).

§ 18. Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes literales

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{a}{b-c}, \\ \dfrac{x+c}{y+b} = \dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$$

De la primera ecuación, según la propiedad de las proporciones derivadas*) $\left(\text{si } \frac{m}{n}=\frac{p}{q}, \text{ entonces } \frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}\right)$ hallamos que $\frac{2x}{2y}=\frac{a+b-c}{a+c-b}$, de donde

$$x=\frac{a+b-c}{a+c-b}y. \qquad (1)$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación del sistema obtendremos:

$$\frac{\frac{(a+b-c)y}{a+c-b}+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c},$$

de donde

$$(a+b)(y+b)=\frac{(a+c)(a+b-c)y}{a+c-b}+c(a+c),$$

$$(a+b)y-\frac{(a+c)(a+b-c)y}{a+c-b}=c(a+c)-b(a+b),$$

$$y\frac{(a+b)(a+c-b)-(a+c)(a+b-c)}{a+c-b}=c(a+c)-b(a+b),$$

$$y\frac{(a+b)(a+c)-b(a+b)-(a+c)(a+b)+c(a+c)}{a+c-b}=$$

$$=c(a+c)-b(a+b).$$

Simplificando ambos miembros de la ecuación por $c(a+c)-$ $-b(a+b)$, obtenemos:

$$\frac{y}{a+c-b}=1, \quad y=a+c-b.$$

Sustituyendo el valor hallado de y en la igualdad (1), tendremos que $x=a+b-c$.

---

*) Si se tiene la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \text{ y } \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ y } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0, \\ ax+\ by+\ cz=0, \\ bcx+acy+abz=1. \end{cases} \qquad (2)$$

De la primera ecuación tendremos:

$$z=-(x+y);$$

sustituimos este valor de z en la segunda y tercera ecuaciones del sistema (2), lo que nos conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+\ by-\ c(x+y)=0, \\ bcx+acy-ab(x+y)=1. \end{cases} \qquad (3)$$

De la primera ecuación del sistema (3) se deduce:

$$(a-c)\,x=(c-b)\,y;$$

para $a-c\neq 0$, tendremos

$$x=\frac{c-b}{a-c}\,y. \qquad (4)$$

Después de sustituir la expresión hallada de x en la segunda ecuación del sistema (3) obtenemos la ecuación con una incógnita:

$$\frac{(bc-ab)(c-b)}{a-c}\,y+(ac-ab)\,y=1,$$

o bien

$$-b(c-b)\,y+a(c-b)\,y=1,$$

$$(c-b)(a-b)\,y=1;$$

$$y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}.$$

De la igualdad (4) hallamos:

$$x=\frac{c-b}{a-c}\,\frac{1}{(a-b)(c-b)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)},$$

$$z=-(x+y)=\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Resolver las ecuaciones:

1) $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}.$

2) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}$.

3) $\frac{2x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$.

2. Resolver los sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} 7x-3y-8=0, \\ 4x+9y+24=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x:y=3:4, \\ (x-1):(y+2)=1:2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=0, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+\frac{9}{y}=21, \\ \frac{18}{y}=17-3x. \end{cases}$

Advertencia. $\frac{1}{y}=z$.

5) $\begin{cases} \frac{5x}{0,7}+\frac{0,3}{y}=6, \\ \frac{10x}{7}+\frac{9}{y}=31. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5}{2x+y}+\frac{4}{2x-3y}=5, \\ \frac{15}{2x+y}+\frac{2}{2x-3y}=5. \end{cases}$

Advertencia.

$\frac{1}{2x+y}=z, \quad \frac{1}{2x-3y}=t.$

7) $\begin{cases} mx-2y=3, \\ 3x+my=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+my-9=0, \\ 2mx+18y+27=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a, \\ x-y=4ab. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{x}{x-a}+\frac{y}{y-b}=2, \\ ax+by=2ab. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0, \\ \frac{x}{b}-\frac{y}{a}-1=0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} (a+b)\,x-(a-b)\,y=4ab \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} (a^2+b^2)\,x+(a^2-b^2)\,y=a^2, \\ (a+b)\,x+(a-b)\,y=a. \end{cases}$

Advertencia.

$$\frac{1}{2x+y}=z, \quad \frac{1}{2x-3y}=t.$$

14) $\begin{cases} \dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Advertencia. $\frac{x}{m}=t$; $x=mt$, $y=nt$; $z=pt$.

15) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Advertencia. Introducir la incógnita auxiliar t, suponiendo

$$\frac{x-a}{m}=t.$$

16) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|-4y=-4. \end{cases}$

3. ¿Para qué valores del parámetro k el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+ky=5+k, \\ 2x+5y=8. \end{cases}$$

tiene solución única?

4. ¿Para qué valor del parámetro k el sistema

$$\begin{cases} (1+2k)\,x+5y=7, \\ (2+k)\,x+4y=8 \end{cases}$$

no tiene solución?

5. ¿Para qué valor del parámetro k el sistema

$$\begin{cases} (2k-1)\,x+ky=6, \\ 7{,}5x+4y=3 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones? Hallar aunque sea una de esas soluciones.

CAPITULO III

DESIGUALDADES

§ 19. Conceptos fundamentales y definiciones

● DEFINICION 1. Dos números o dos expresiones algebraicas, relacionadas entre sí por el signo $<$ («menor»), o por el signo $>$ («mayor»), o por el signo $\neq$ (no es igual), forman una *desigualdad*.

Ejemplos. 1) $3 > -5$; 2) $a < 1 + a^2$; 3) $3 \neq 2$.

● DEFINICION 2. Dos desigualdades de tipo $a < b$, $c < d$ o $a > b$, $c > d$ se denominan desigualdades del *mismo sentido*; por ejemplo, $3 > 2$ y $7 > -20$.
Dos desigualdades de tipo a $a > b$ y $c < d$ se denominan desigualdades de *sentido contrario*; por ejemplo, $4 < 5$ y $0 > -3$. A veces a los signos $>$ o $<$ se une también el signo de igualdad, por ejemplo, $a \geqslant 0$ (se lee: «el número a no es negativo») o $b \leqslant 0$ («el número b no es positivo») *).
Tales desigualdades se denominan *no rigurosas* (*indeterminadas*), a diferencia de las *rigurosas* (*determinadas*) $a > b$ ó $c < d$.

§ 20. Propiedades de las desigualdades

1) *Si* $a > b$, *entonces* $b < a$.
2) *Si* $a > b$ *y* $b > c$, entonces $a > c$.
3) *Dos desigualdades de la forma*: (1) $a < b$ y $b < c$ ó (2) $a > b$ y $b > c$ *pueden ser unidas en una doble desigualdad*:

(1) $a < b < c$ *y* (2) $a > b > c$.

Ejemplo. Si a es un valor aproximado de la magnitud x, Δa, el límite del error absoluto del número aproximado a, el valor real de la magnitud $x < a + \Delta a$, pero $x > a - \Delta a$, y puede escribirse la doble desigualdad: $a - \Delta a < x < a + \Delta a$.

*) Se acostumbra también leer: «el número a es mayor o igual a cero» y «el número b es menor o igual a cero», respectivamente. (*Nota del T.*)

4) *Si* $a > b$ y m *es un número cualquiera,*

$a + m > b + m$.

A ambos miembros de la desigualdad se les puede sumar (o restar de ambos miembros) un mismo número, y, como resultado, se obtendrá una desigualdad del mismo sentido.

E j e m p l o. $5 > 3$; sumemos a ambos miembros el número 4, obtendremos $9 > 7$.

5) *Si* $a > b$ *y* m *es un número positivo,*

$am > bm$.

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por un mismo número positivo, el sentido de la desigualdad no varía.

Al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número negativo m ($m < 0$) el sentido de la desigualdad cambiará por el contrario, es decir, *si* $a > b$ y $m < 0$, *tendremos que*

$am < bm$.

E j e m p l o. $3 > -1$ lo multiplicamos por -4; obtendremos $-12 < 4$. Lo mismo se puede decir respecto a la división de ambos miembros de la desigualdad por el número m ($m \neq 0$), puesto que la división se reduce a la multiplicación por $\frac{1}{m}$.

§ 21. Operaciones con desigualdades

1. Suma. *Dos o varias desigualdades del mismo sentido se pueden sumar miembro a miembro; como resultado se obtendrá una desigualdad del mismo sentido:*

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > d, \\ m > n, \\ \hline a + c + m > b + d + n \end{array}$$

2. Resta. *Las desigualdades de sentido contrario se pueden restar miembro a miembro; como resultado obtendremos una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.*

Si $a > b$ y $c < d$, y de la primera desigualdad restamos la segunda,

$a - c > b - d.$

E j e m p l o.

$$\begin{array}{r} -3 > -7 \\ 4 < \;\;5 \\ \hline -3-4 > -7-5, \end{array}$$

ó $-7 > -12.$

3. Multiplicación. *Dos o varias desigualdades de igual sentido se pueden multiplicar entre sí miembro a miembro si todos sus miembros son positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido.*

Si

$$\begin{array}{l} a < b \\ c < d \;\; (a > 0, \; c > 0), \\ \hline \end{array}$$

entonces $ac < bd$.

E j e m p l o.

$$\begin{array}{r} 3 < 5 \\ 4 < 6 \\ \hline 12 < 30. \end{array}$$

4. División. *Dos desigualdades de sentido contrario se pueden dividir miembro a miembro si todos los miembros de la desigualdad son números positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo, es decir, la desigualdad que dividimos por la otra:*

$$\begin{array}{l} a > b \\ c < d \;\; (b > 0, \; c > 0) \\ \hline \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

E j e m p l o

$$\begin{array}{l} 4 > 3 \\ 1 < 2 \\ \hline \frac{4}{1} > \frac{3}{2}. \end{array}$$

§ 22. Resolución de desigualdades de primer grado con una incógnita

● DEFINICION 1. La desigualdad de la forma

$$ax + b > a_1x + b_1 \text{ ó } ax + b < a_1x + b_1$$

se denomina *desigualdad de primer grado con una incógnita.* Así serán, por ejemplo, las desigualdades

1) $\frac{3x}{2} - 5 > \frac{2x}{5} + 2,$

2) $4 - 5x < x + 22.$

Se denomina *solución* de la desigualdad todo valor de x que satisface a la desigualdad dada.

Por ejemplo, el número 2 es la solución de la desigualdad $4 - 5x < x + 22$, puesto que $4 - 5 \cdot 2 < 2 + 22$, $-6 < < 24$.

● DEFINICION 2. *Resolver una desigualdad* significa hallar todos los valores de la incógnita que verifican a la desigualdad dada. La búsqueda de la solución de cualquier desigualdad de primer grado con una incógnita da lugar a desigualdades elementales de la forma

1) $x > a$

2) $x < b.$

En el primer caso se dice que el número a es el *límite inferior* de los valores de la incógnita. Quiere decir que cualquier número mayor que el número a es solución de la desigualdad dada. Si sobre el eje numérico se lleva el punto correspondiente al número a, los valores de la incógnita x que verifican la desigualdad $x > a$, se representan por los puntos que se encuentran a la derecha del punto $x = a$ (en la fig. 4 está rayado).

En la desigualdad elemental $x < b$ el número (letra) b se denomina *límite superior* de la incógnita, lo que significa que: cualquier número menor que b es una solución de esta desigualdad. La desigualdad $x < b$ se ilustra gráficamente del siguiente modo: sobre el eje numérico se marca el punto correspondiente al número b; en tal caso, cualquier punto ubicado a la izquierda de b representa al número que verifica la desigualdad dada (fig. 5).

Las desigualdades de primer grado con una incógnita se

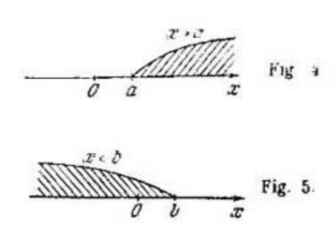


Fig. 4

Fig. 5.

resuelven por el mismo esquema que las ecuaciones de primer grado. Veamos algunos ejemplos.

E j e m p l o.

$\frac{2x-5}{3}-1>3-x.$

Multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $3 > 0$, para librarnos de la fracción:

$2x-5-3>9-3x.$

Pasamos el término con la incógnita del segundo miembro al primero, y el término independiente del primer miembro al segundo, cambiando los signos de los términos que se pasan de un miembro a otro por los contrarios:

$2x+3x>9+8;\ 5x>17.$

Dividiendo ambos miembros por $5 > 0$, obtenemos $x > 3{,}4$. El número 3,4 es el límite inferior de los valores de la incógnita x.

§ 23. Segmento. Intervalo

Supongamos que a y b son dos números, además $a < b$. A los números a y b les añadimos todos los números intermedios comprendidos entre ellos. En tal caso se forma un conjunto *cerrado* de los números x: $a \leqslant x \leqslant b$. La cualidad de cerrado radica en que en este conjunto existe un número menor a y un número mayor b.

● DEFINICION 1. El conjunto de todos los números x, que verifican las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, se denomina *segmento*. Se admite en designar el segmento por $[a, b]$; por ejemplo, se escribe $[0, 2]$ en lugar de $0 \leqslant x \leqslant 2$. La propia denominación de segmento indica que a este conjunto numérico corresponde un conjunto de puntos del eje numérico, que llenan

totalmente el segmento con extremos en los puntos $x = a$ y $x = b$.
Eliminamos los puntos extremos del segmento $[a, b]$, en tal caso obtenemos un conjunto abierto de los números x: $a < x < b$; en este conjunto no hay un número menor ni un número mayor, debido a lo cual se denomina *abierto*.

● DEFINICION 2. El conjunto de todos los números x que verifican la doble desigualdad $a < x < b$, se denomina *intervalo*.
El intervalo se designa con el símbolo (a, b); por ejemplo, $(1, 5)$ denota que $1 < x < 5$.
Si ocurre que $a \leqslant x < b$, se dice que x pertenece al semiintervalo $[a, b)$; si $a < x \leqslant b$, se dice que x pertenece al semiintervalo $(a, b]$.

§ 24. Resolución de sistemas de desigualdades de primer grado

● DEFINICION. Las dos desigualdades de tipo

$$\begin{cases} ax + b > 0, \\ a_1x + b_1 < 0, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} ax + b > 0, \\ a_1x + b_1 > 0, \end{cases}$$

con respecto a las cuales se buscan sus soluciones generales, forman un *sistema de desigualdades de primer grado con una incógnita*.
El método general de resolución del sistema de dos desigualdades tiene como objeto lo siguiente: hallamos las soluciones de cada desigualdad por separado y comparándolas establecemos cuáles de las soluciones son comunes para ambas desigualdades; si no existen soluciones generales, el sistema es incompatible, o contradictorio. La elección de las soluciones generales se facilita si las soluciones de cada desigualdad se representan sobre el eje numérico.

Ejemplo 1. Resolver el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 5x + 4 > 0. \end{cases}$$

1) $2x - 3 > 0$, $x > \frac{3}{2}$;

2) $5x + 4 > 0$, $x > -\frac{4}{5}$.

Para la primera desigualdad el número $\frac{3}{2}$ es el límite inferior de los valores de la incógnita. Marcamos este punto

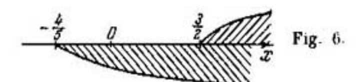


Fig. 6.

y rayamos la parte superior del eje numérico que se encuentra a la derecha del punto correspondiente al número $\frac{3}{2}$ (fig .6). Análogamente rayamos por debajo el eje numérico, comenzando del punto $-\frac{4}{5}$ hacia la derecha, puesto que el número $-\frac{4}{5}$ es el límite inferior de los valores de la incógnita para la segunda desigualdad. Allí donde el eje resulta rayado tanto por encima como por debajo se hallan las soluciones generales. En este caso todos los números mayores que $\frac{3}{2}$ son soluciones generales:

$$x > \frac{3}{2}.$$

E j e m p l o 2. Resolver el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4, \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) > 2(4-x). \end{cases}$$

Reducimos cada una de las desigualdades a una forma más simple, para lo cual nos libramos de las fracciones, abrimos los paréntesis, pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos los términos semejantes; así, obtenemos

$$\begin{cases} -13x + 39 < 0, \\ -\ 4x + 36 > 0 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} -x + 3 < 0, \\ -x + 9 > 0. \end{cases}$$

Resolviendo la primera desigualdad, hallamos que $x > 3$; de la segunda, que $x < 9$.
Ambas desigualdades se satisfacen simultáneamente por los valores de x tomados en el intervalo $3 < x < 9$ (fig. 7).



Fig. 7.

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad $\frac{x+2}{3-x}>2$.

Tenemos que $\frac{x+2}{3-x}-2>0$, reduciendo a un común denominador, se obtiene

$$\frac{x+2-2(3-x)}{3-x}>0,$$

$$\frac{3x-4}{3-x}>0.$$

La fracción es positiva si los signos del numerador y del denominador son iguales, por eso, o bien

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ 3-x>0, \end{cases} \tag{1}$$

o bien

$$\begin{cases} 3x-4<0, \\ 3-x<0. \end{cases} \tag{2}$$

Resolviendo el sistema (1), hallamos que a la primera desigualdad satisfacen los valores de $x>\frac{4}{3}$, a la segunda, los valores de $x<3$. Ambas desigualdades se satisfacen simultáneamente si $\frac{4}{3}<x<3$.

El sistema (2) es incompatible, es decir, no tiene soluciones, ya que de la primera desigualdad de este sistema se deduce que $x<\frac{4}{3}$, y de la segunda, $x>3$. Todo número mayor que 3 no puede ser al mismo tiempo menor que $\frac{4}{3}$.

§ 25. Desigualdades que contienen la incógnita bajo el signo de módulo

La magnitud absoluta del número real x, es decir $|x|$, se puede interpretar geométricamente como la distancia del punto, que representa el número x, al origen 0 del eje numérico. Por ejemplo, si $|x|=3$, sobre el eje numérico se

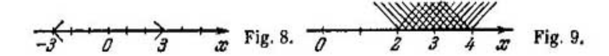


Fig. 8. Fig. 9.

tienen solamente dos puntos: $x_1 = -3$ y $x_2 = +3$, los que distan del origen 0 tres unidades de la escala.

La desigualdad elemental $|x| < 3$ significa que se buscan tales valores de la incógnita x, a los que corresponden puntos que distan del origen 0 menos de tres unidades de longitud (según la escala elegida). Está claro que todos estos puntos pertenecen al intervalo $(-3, 3)$ (fig. 8). Todo número de este intervalo es la solución de la desigualdad $|x| < 3$. Todas las soluciones se escriben en forma de una doble desigualdad

$$-3 < x < 3.$$

La desigualdad $|x| \leqslant 3$ se diferencia de la anterior $|x| < 3$ solamente en que se agrega dos nuevas soluciones de $x = \pm 3$; todas las soluciones forman el segmento $[-3, 3]$ ó $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

E j e m p l o 1. Resolver la desigualdad

$$|x - 3| < 1.$$

Método de resolución *geométrica*. Desde el punto $x = 3$ marcamos una unidad de la escala a la izquierda, después a la derecha; obtenemos dos puntos: 2 y 4. Todo punto intermedio entre ellos verifica la desigualdad (fig. 9), es decir,

$$2 < x < 4.$$

Método de resolución *algebraica*. Suprimimos el signo de valor absoluto y escribimos la doble desigualdad

$$-1 < x - 3 < 1;$$

sumamos el número 3 a los tres miembros de la desigualdad:

$$-1 + 3 < x - 3 + 3 < 1 + 3,$$

o bien

$$2 < x < 4.$$

E j e m p l o 2. $|2x + 3| < 5$. Esta desigualdad es equivalente a la doble desigualdad $-5 < 2x + 3 < 5$. Sumamos a todos los miembros de la desigualdad el número -3,

obtenemos $-8 < 2x < 2$, dividimos todos los miembros por 2: $-4 < x < 1$.
Resolvamos este ejemplo de otro modo. Tenemos:

$$2\left|x+\frac{3}{2}\right| < 5;$$

dividimos àmbos miembros por 2:

$$\left|x+\frac{3}{2}\right| < \frac{5}{2},$$

o bien

$$\left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| < \frac{5}{2};$$

del punto $x=-\frac{3}{2}$ del eje numérico marcamos a la izquierda y a la derecha $\frac{5}{2}$ de la unidad de escala; obtenemos los puntos -4 y 1. Ahora está claro que

$$-4 < x < 1.$$

E j e m p l o 3. $|2x-3| > 7$.
Al buscar la solución de esta desigualdad hay que considerar dos casos:
a) $2x-3>0$, en tal caso $|2x-3| = 2x-3$, $2x-3>7$, $x>5$;
b) $2x-3<0$, entonces $|2x-3| = -(2x-3)$ (la magnitud absoluta de un número negativo es igual a ese número con signo contrario); resolvemos la desigualdad $-(2x-3)>7$; $2x-3<-7$, $x<-2$.
De este modo, cualquier número mayor que 5, así como todo número menor que -2 son soluciones de la desigualdad $|2x-3|>7$ (fig. 10).
Resolvamos este ejemplo de otro modo. Representemos su primer miembro en la forma

$$2\left|x-\frac{3}{2}\right| > 7,$$

ó

$$\left|x-\frac{3}{2}\right| > \frac{7}{2}.$$

Del punto del eje numérico correspondiente al número $\frac{3}{2}$ marcamos a la izquierda y a la derecha $\frac{7}{2}$ de unidades, obtenemos los puntos -2 y 5. Con esta construcción se distingue

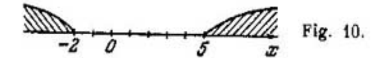


Fig. 10.

el segmento [−2; 5]; todos los números que no pertenecen a a este segmento son soluciones de la desigualdad dada; éstos serán los números menores que −2 y mayores que 5; $x < -2$ ó $x > 5$.

§ 26. Noción sobre la demostración de las desigualdades

La desigualdad que se cumple para todos los valores de las letras, que la componen (puede ser con ciertas limitaciones), se denomina desigualdad *idéntica*. Con respecto a esta desigualdad no se plantea su resolución sino la demostración. Mediante ejemplos aclararemos en qué consiste la demostración y cómo se realiza ella.

E j e m p l o 1. Demostrar que la media aritmética de dos números positivos no es menor que su media geométrica, es decir, que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Supongamos que dicha desigualdad se verifica; en tal caso, después de elevar ambos miembros al cuadrado obtenemos una desigualdad del mismo sentido (al número positivo mayor corresponde el cuadrado mayor)

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab \text{ ó } a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Es evidente que la última desigualdad és idéntica, puesto que el cuadrado de cualquier número real no es negativo ($\geqslant 0$). Por ahora esto es sólo la tesis y no la propia demostración, puesto que cuando comenzamos a transformar la desigualdad dada, es decir, elevamos al cuadrado ambos miembros, sumamos a ambos miembros un mismo término, etc., conservando entre los miembros de la desigualdad el signo $\geqslant$ (se lee «no menor que»), en realidad, aceptamos que el primer miembro de la desigualdad no es menor que el segundo, por lo que no hay nada que demostrar. Si demostramos que las operaciones realizadas son reversibles, con ello se demostrará que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Tenemos:

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \text{ ó } a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Sumamos a ambos miembros $2ab$:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab; \quad \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

Extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros y tomamos sólo los valores aritméticos de las raíces, en tal caso $\frac{a+b}{2} \geqslant \geqslant \sqrt{ab}$. Es evidente que el signo de igualdad se tendrá solamente cuando $a = b$.

Ejemplo 2. Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

■ DEMOSTRACION Vamos a partir de las desigualdades evidentes:

$$\left.\begin{array}{ll} (a-b)^2 \geqslant 0, & a^2+b^2 \geqslant 2ab, \\ (a-c)^2 \geqslant 0, \text{ ó } & a^2+c^2 \geqslant 2ac, \\ (b-c)^2 \geqslant 0 & b^2+c^2 \geqslant 2bc. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Sumando las desigualdades (1), obtenemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + ac + bc);$$

después de dividir por 2, tendremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Ejemplo 3., Demostrar que si $x + y + z = 1$, donde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, entonces
$(1 - x)(1 - y) \quad (1 - z) \geqslant 8xyz$.

■ DEMOSTRACION Como base tomamos las desigualdades conocidas (ejemplo 1)

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz},$$

de donde

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy},$$
$$x + z \geqslant 2\sqrt{xz},$$
$$y + z \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

Puesto que de la condición se deduce que $x + y = 1 - z$, $x + z = 1 - y$, $y + z = 1 - x$, las desigualdades anotadas adquieren la forma

$$1 - z \geqslant 2\sqrt{xy},$$
$$1 - y \geqslant 2\sqrt{xz},$$
$$1 - x \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

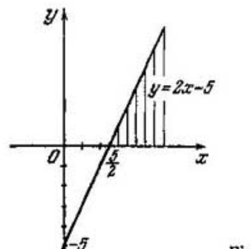


Fig. 11.

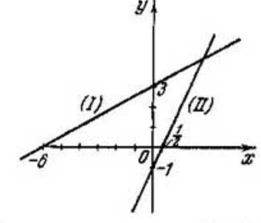


Fig. 12.

Después de multiplicar miembro a miembro estas tres desigualdades obtenemos:

$(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz.$

§ 27. Resolución gráfica de desigualdades

Ejemplo 1. Resolver gráficamente la desigualdad $2x-5>0$.

El primer miembro de la desigualdad, es decir, $2x-5$, es una función lineal de argumento x; lo designamos por y:

$y=2x-5,$

y construimos su gráfica (fig. 11). La desigualdad $2x-5>$ >0 significa que se buscan tales valores del argumento x, para los cuales la función lineal es positiva, es decir, las ordenadas de la recta son positivas, o los puntos de la gráfica se encuentran por encima del eje de abscisas. Este requisito lo satisfacen todos los puntos, cuyas abscisas son mayores que $\frac{5}{2}$; dicho de otro modo, estos puntos se encuentran a la derecha del punto de intersección de la recta con el eje Ox.

Ejemplo 2. Resolver gráficamente el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+3>0, \\ 2x-1<0. \end{cases}$$

Construimos las gráficas de las dos funciones lineales (fig. 12)

(I) $\quad y=\frac{1}{2}x+3$

(II) $y = 2x - 1$.

A continuación debemos indicar todos los valores del argumento x, para los cuales simultáneamente las ordenadas de la primera recta son positivas, y las de la segunda recta, negativas. Los valores de x comprendidos entre -6 y $\frac{1}{2}$, satisfacen este requisito:

$$-6 < x < \frac{1}{2}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Resolver las desigualdades:

1) $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$;

2) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$;

3) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$;

4) $m(x-1) > x+2$;

5) $\frac{x}{k} + \frac{1-3x}{2} < \frac{x+2}{4k}$ $(k < 0)$;

6) $\frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$ $(m \neq 2)$;

7) $|3x-5| < 3$;

8) $|4-3x| < 0{,}1$;

9) $|3-2x| > 5$;

10) $|5x+3| > 8$.

2. Resolver las desigualdades y los sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 3x+2 > 0; \end{cases}$

2) $\frac{10-x}{x-6} < 1$;

3) $\begin{cases} 0{,}4x + \frac{7}{3} < \frac{2}{3}x - 1{,}2, \\ 5x+17 > 9x - 63; \end{cases}$

4) $\frac{2x+1}{3-x} > 1$.

3. ¿Para qué valores de a se verifica la desigualdad

$$1 < \frac{3a+10}{a+7} < 2?$$

4. ¿Para qué valores de m el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+7y = m, \\ 3x+5y = 13 \end{cases}$$

tiene soluciones positivas?

5. ¿Para qué valores del número a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-6y = 1, \\ 5x-ay = 2 \end{cases}$$

tiene soluciones negativas?

6. Determinar el número m de manera que la raíz de la ecuación $\frac{3}{x}=\frac{2m-1}{x+m}$ sea mayor que 1.

7. ¿Para qué valores enteros de n la solución del sistema

$$\begin{cases} nx-\ \ y=5, \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$$

satisface la condición $x>0$ e $y<0$?

8. Demostrar la desigualdad $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$ cuando $a>0$, $b>0$.

9. Demostrar que para todo valor real de x se cumple la desigualdad $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

10. Demostrar que la suma le dos números positivos no es menor que 2, si su producto es igual a 1.

CAPITULO IV

NUMEROS REALES

§ 28. Nota de introducción

En el texto del presente capítulo se usa frecuentemente la palabra «conjunto». Aclaremos el significado de este concepto en ejemplos concretos.

1) Todos los estudiantes de la ciudad de Moscú forman el *conjunto* de estudiantes de Moscú. Este conjunto se compone de un número finito de elementos; cada estudiante por separado de la ciudad de Moscú es un elemento del conjunto; cualquier estudiante de otra ciudad o región no pertenece a este conjunto.

2) Todos los rectángulos de área igual a un metro cuadrado forman un conjunto de rectángulos de dicha área de 1 m²; este conjunto es infinito. Los elementos del conjunto son los rectángulos individuales, por ejemplo, el rectángulo de 2 m y $\frac{1}{2}$ m de lados.

3) Todos los números enteros positivos forman el conjunto de números naturales: 1, 2, 3, 4, . . . Este conjunto es infinito. En adelante nos referiremos solamente a los conjuntos numéricos.

§ 29. Números racionales

Los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, y el numero 0 forman el conjunto de números *racionales*. Todo número racional se puede considerar como la relación de dos números enteros: $r = \frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$.

Ejemplo.

$3 = \frac{3}{1}$; $-4{,}5 = -\frac{9}{2}$.

Conviene hacer notar que los números racionales se pueden

representar en forma de fracciones decimales periódicas infinitas

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ \ldots$$

$$\frac{2}{5}=0{,}4000\ \ldots=0{,}3999\ \ldots$$

$$-1\frac{2}{7}=-1,\ (285714).$$

Inverso: toda fracción periódica infinita es un número racional, puesto que éste puede convertirse en una fracción ordinaria, por ejemplo:

$$0{,}3666\ \ldots=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}=\frac{11}{30}$$

(más detalladamente en el cap. XVI, § 243).

Al realizar las cuatro operaciones aritméticas con números racionales (excepto la división por 0), como resultado obtenemos también números racionales, es decir, estas operaciones no nos sacan del conjunto de números racionales y no requieren la introducción de números nuevos.

Exactamente del mismo modo se pueden resolver las ecuaciones de primer grado (lineales) con una incógnita y los sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas; los valores de las incógnitas serán siempre números racionales, si los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son racionales. Sin embargo, al resolver las ecuaciones cuadráticas elementales tropezamos con la necesidad de ampliar el concepto de número. Por ejemplo, la ecuación $x^2-3=0$, ó $x^2=3$, no tiene una raíz entera, puesto que no existe un número entero tal, cuyo cuadrado es igual a 3. Demostremos que la raíz de esta ecuación no puede ser tampoco un número fraccionario.

Supongamos lo contrario: $x=\frac{m}{n}$, donde $\frac{m}{n}$ es una fracción irreducible. En tal caso, $\left(\frac{m}{n}\right)^2=3$, lo que es un absurdo, ya que el cuadrado de una fracción irreducible es también una fracción irreducible, y ella no puede igualarse a un número entero (3). Por lo tanto, la raíz de la ecuación no es un número racional.

Para poder hablar de raíces de semejantes ecuaciones es necesario introducir números nuevos, denominados números *irracionales.*

Los números irracionales no se pueden prescindir incluso en geometría, cuando se plantea la medición de segmentos.

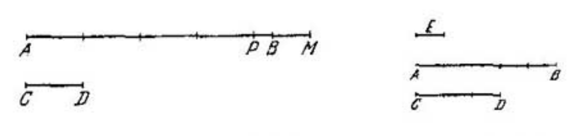


Fig. 13. Fig. 14.

§ 30. Medición de segmentos

En este párrafo nos apoyaremos en la siguiente afirmación, conocida bajo la denominación de *axioma de Arquímedes*: *si AB y CD son dos segmentos arbitrarios y $AB > CD$, existe un número entero positivo n tal que $CD \cdot n > AB$.* En otras palabras, siempre se puede llevar el segmento menor CD sobre el segmento mayor AB tantas veces para que se obtenga el segmento AM, que supera en longitud al segmento AB. En la fig. 13 se muestra que después de llevar cuatro veces el segmento CD sobre el segmento AB se obtiene el segmento PB, menor que CD; llevando cinco veces el segmento CD, obtenemos el segmento AM, (mayor que AB, lo que puede escribirse del siguiente modo:

$$CD \cdot 4 < AB < CD \cdot 5$$

En este caso el número $n = 5$.

● DEFINICION 1. Se denomina *medida común* de dos segmentos AB y CD un tercer segmento E tal, que cabe un número entero de veces en cada uno de los segmentos dados. En la fig. 14 se aprecia que el segmento E entra en el segmento AB cinco veces, y en el segmento CD, tres veces.

● DEFINICIÓN 2. Dos segmentos que tienen una medida común se denominan *conmensurables.*

● DEFINICIÓN 3. Se denomina *relación* de dos segmentos conmensurables la relación de los números que expresan sus longitudes según la unidad de longitud admitida E.
De este modo, para los segmentos de la fig. 14

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}.$$

Si la medida común E cabe en cierto segmento m veces, y en otro segmento n veces, su relación es igual al número racional $r = \frac{m}{n}$.

Es cierta también la tesis inversa: si la relación de dos segmentos es un número racional, estos dos segmentos son conmensurables, es decir, tienen una medida común.

En efecto, supongamos que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$; en tal caso se puede tomar como medida común un segmento igual a $\frac{1}{n}$-ésima parte del segmento CD:

$$E = \frac{1}{n} CD.$$

De donde

$$CD = nE, \quad AB = mE,$$

y

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mE}{nE} = \frac{m}{n}.$$

● DEFINICION 4. Dos segmentos que no tienen medida común se denominan *inconmensurables*.

T e o r e m a. *La diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado.*

■ DEMOSTRAREMOS por el método del absurdo. Supongamos que la diagonal del cuadrado es conmensurable con su lado; en tal caso, la relación de los mismos es un número racional: $\frac{d}{a} = r$, además $1 < r < 2$, puesto que la diagonal d es mayor que el lado del cuadrado a, pero menor que el doble del lado $2a$ (la hipotenusa es menor que la suma de los catetos); por lo tanto, el número r es una fracción impropia $\frac{m}{n}$, que se puede considerar irreducible:

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{n}; \quad d = \frac{m}{n} a.$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$d^2 = 2a^2, \quad \left(\frac{m}{n} a\right)^2 = 2a^2,$$

o bien

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

lo que es un absurdo, puesto que el cuadrado de una fracción irreducible no puede ser un número entero. Hemos llegado

a un absurdo suponiendo que la diagonal del cuadrado es conmensurable con su lado. Con esto el teorema queda demostrado.

§ 31. Medición decimal de segmentos

Demostrado que existen segmentos inconmensurables, aclaremos que se debe entender por relación de dos segmentos inconmensurables o, en otras palabras, que se acepta por longitud del segmento inconmensurable con un segmento considerado como unidad de medición.

Supongamos que sean AB y CD dos segmentos arbitrarios (fig. 15). Llevamos el segmento menor CD sobre el mayor tantas veces como sea necesario hasta obtener el resto PB, menor que el segmento CD. En la figura se muestra el caso en que tal situación se alcanza después de llevar CD tres veces. Dividamos CD en diez partes iguales y una décima de su parte la llevamos sobre el resto PB tantas veces hasta obtener un nuevo resto P_1B, menor que $\frac{1}{10}$ parte del segmento CD. Conforme a nuestra figura esto ocurre después de llevar cuatro veces $\frac{1}{10}$ de fracción de CD. El nuevo resto P_1B lo medimos por $\frac{1}{100}$ de parte del segmento CD, hasta obtener el resto P_2B, menor que $\frac{1}{100}$ de CD, etc.

De la medición descripta antes son posibles los siguientes tres resultados.

C a s o 1. La medición termina en cierto paso; por ejemplo, si la $\frac{1}{100}$ parte del segmento CD está contenida en el resto P_1B exactamente seis veces, con ello se termina la medición del segmento AB y como resultado obtenemos el número racional 3,46.

C a s o 2. La medición se continúa ilimitadamente y como resultado se obtiene una fracción decimal periódica infinita.

C a s o 3. La medición se continúa ilimitadamente y en su proceso se obtiene una fracción decimal aperiódica infinita, por ejemplo: 2,451451145111....

Los primeros dos casos pueden surgir sólo cuando los segmentos AB y CD son conmensurables, puesto que entonces su relación es un número racional.

Fig. 15.

El tercer caso ocurre sólo cuando el segmento AB es inconmensurable con el segmento CD. La fracción decimal aperiódica infinita en la medición ilimitada es un nuevo número, que se diferencia del número racional y se denomina número *irracional*.

● DEFINICIÓN 1. Toda fracción decimal aperiódica infinita se denomina número *irracional*.

Como ejemplos elementales de números irracionales pueden servir: 1) el número $\sqrt{2}$, que expresa la longitud de la diagonal del cuadrado, si el largo del lado del cuadrado se ha tomado igual a 1; 2) el número $\sqrt{3}$, es decir, es una de las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 0$, y en general, la raíz de cualquier número positivo que no es una potencia exacta de la raíz, por ejemplo, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{2}$, etc.

Sin embargo, el conjunto de números irracionales no se concluye con estas raíces. He aquí otros ejemplos de números irracionales:

1) el número π, que expresa la relación entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro; éste también es un número irracional, pero él no puede ser expresado por radicales;

2) también es irracional el número x, que satisface la correlación $3^x = 5$, y el número sen 7°.

● DEFINICIÓN 2. Todos los números racionales e irracionales forman el *conjunto de números reales*.

De este modo, la frase «x es un número real» hay que entenderla así: x es un número racional o irracional.

§ 32. Aproximaciones racionales de números reales

Supongamos que se ha dado un número irracional cualquiera α

$\alpha = 0{,}345345534555...$

Conservamos la primera cifra decimal de esta fracción aperiódica infinita, y omitimos las restantes. Obtenemos la fracción 0,3 que denominaremos *aproximación racional del número α con exactitud de hasta* 0,1 *por defecto*; de modo semejante denominaremos la fracción 0,34 aproximación racional

del número α con exactitud de hasta 0,01 por defecto; la fracción 0,345 es una aproximación racional del número α con exactitud de hasta 0,001 por defecto, etc.
Se pueden obtener aproximaciones racionales del mismo número α *por exceso* con exactitud de hasta 0,1, hasta 0,01, hasta 0,001, etc.; éstas serán las fracciones: 0,4: 0,35; 0,346, etc. El número real α es mayor que cualquiera de su aproximación racional por defecto, pero menor que cualquiera de su aproximación racional por exceso.
Cuando se realizan operaciones aritméticas con números reales, de ordinario estos números se sustituyen por sus aproximaciones racionales, tomadas con un grado de exactitud determinado, y se realizan las operaciones indicadas con los números racionales obtenidos.

● DEFINICIÓN 1. Se denomina *suma de dos números reales* un número real tal, que es mayor que la suma de las aproximaciones racionales de los sumandos, tomados, por defecto con cualquier grado de exactitud, pero menor que la suma de las aproximaciones racionales de los sumandos, tomados por exceso con cualquier grado de exactitud.

Ejemplo 1. Hallar la suma $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ con exactitud de hasta 0,001.
Partiendo de la definición de la suma, se pueden escribir las siguientes desigualdades:

$$0{,}3+1{,}4<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}4+1{,}5,$$

$$0{,}33+1{,}41<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}34+1{,}42,$$

$$0{,}333+1{,}414<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}334+1{,}415,$$

$$0{,}3333+1{,}4142<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}3334+1{,}4143.$$

. . . .

Puesto que necesitamos calcular la suma con la exactitud de hasta 0,001, los valores aproximados de los sumandos los tomamos con cuatro cifras decimales y después de la suma suprimimos la última cifra decimal:

$$1{,}7475<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}7477,$$

$$1{,}747<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}748.$$

De este modo, cualquiera de los dos números 1,747 ó 1,748, se puede tomar como valor aproximado de la suma $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ con exactitud de hasta 0,001: el primer número, por defecto; el segundo, por exceso.

● DEFINICIÓN 2. *Por producto de dos números reales* se considera un número real tal que sea mayor que el producto de aproximaciones racionales de los factores, tomados por defecto con cualquier grado de exactitud, pero menor que el producto de sus aproximaciones racionales, tomados por exceso con cualquier grado de exactitud.

E j e m p l o 2. Calcular el producto de los números α y π con exactitud de hasta 0,01, si

$\alpha = 5,414414441 \ldots,\ \pi = 3,14159\ldots$

Basándonos en la definición dada tendremos las siguientes desigualdades:

$5,4 \cdot 3,1 < \alpha \cdot \pi < 5,5 \cdot 3,2,$
$5,41 \cdot 3,14 < \alpha \cdot \pi < 5,42 \cdot 3,15,$
$5,414 \cdot 3,141 < \alpha \cdot \pi < 5,415 \cdot 3,142,$
$5,4144 \cdot 3,1415 < \alpha \cdot \pi < 5,4145 \cdot 3,1416,$
. . . .

Puesto que se necesita multiplicar con la exactitud de hasta 0,01 es decir, en el producto hay que obtener cuatro cifras significativas, los valores aproximados de los factores los tomamos con cinco cifras significativas y después de multiplicar conservamos en el resultado solamente cuatro cifras significativas. Obtenemos:

$17,009 < \alpha\pi < 17,0102$
o bien

$17,00 < \alpha\pi < 17,01.$
De manera semejante se definen las demás operaciones aritméticas con números reales.

E j e m p l o 3. Hallar la longitud del segmento *AB* con la exactitud de hasta 0,01, si el largo del segmento *CD* se toma por unidad.
En este caso es indiferente que el segmento *AB* sea conmensurable o no con el segmento *CD*. Siempre se puede hallar un número racional tal que da un valor aproximado de la longitud de *AB* con el grado de exactitud dado.

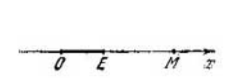


Fig. 16.

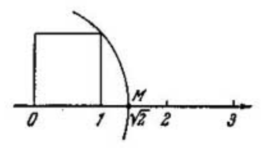


Fig. 17.

Dividamos el segmento CD en cien partes iguales y vamos a llevar su $\frac{1}{100}$ parte sobre el segmento AB tantas veces hasta obtener un resto menor que la centésima parte del segmento CD. Supongamos que para ello esta operación se debe realizar n veces. Llevando una vez más la $\frac{1}{100}$ parte del segmento CD, obtenemos un segmento mayor que el segmento AB. En tal caso obtenemos dos fracciones decimales:

$$\frac{n}{100} \text{ y } \frac{n+1}{100}.$$

La primera de ellas nos da una longitud de AB por defecto, la segunda por exceso con la exactitud de hasta 0,01:

$$\frac{n}{100} < \text{longitud de } AB < \frac{n+1}{100}.$$

§ 33. Representación geométrica de los números reales

Trazamos una recta y sobre ella elegimos: 1) el sentido positivo, por ejemplo el sentido de la izquierda a la derecha (indicado con una flecha), 2) el origen de la lectura, es decir, el punto arbitrario O, 3) la unidad de escala (OE) (fig. 16). La recta construida de este modo se denomina *eje*.

A cada punto tomado sobre el eje, por ejemplo, al punto M, se le puede dar respectivamente un número real único x, que exprese la longitud del segmento OM, además, $x > 0$, si el punto M se encuentra a la derecha del origen O; si M se encuentra a la izquierda de O, $x < 0$. Al punto O corresponde 0. Se satisface también la afirmación inversa: a cada número real x le corresponde un punto único M sobre el eje Ox; el punto M está a la derecha del origen O si $x > 0$; si $x < 0$, el punto M se encuentra a la izquierda del origen O. De este modo, la correspondencia entre los números reales y los puntos del eje es *biunívoca*. Los puntos que representan números racionales se denominan *puntos racionales*, y los puntos a los que corresponden números irracionales,

puntos irracionales. El eje Ox se llama eje de números reales, de otro modo, *recta numérica* (*abscisa*).

E j e m p l o. Marcar el punto M, que represente el número $\sqrt{2}$. Construimos un cuadrado de lado igual a la unidad (fig. 17). Desde el centro O con una apertura del compás igual al largo de la diagonal intersecamos el eje Ox; el punto M obtenido representa el numero $\sqrt{2}$.

CAPITULO V

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

§ 34. Potencia de exponente natural

1. DEFINICIÓN. El producto de varios factores iguales entre sí se denomina *potencia:*

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{\text{en total } n \text{ veces}} = a^n.$$

El factor a que se repite se denomina *base de la potencia*; el número n que indica las veces que se repite la base como factor, se denomina *exponente*.
La segunda potencia del número a se denomina *cuadrado*; la tercera, *cubo*.

2. Regla de los signos. *La potencia par de un número positivo o negativo es un número positivo; la potencia impar de un número positivo es un número positivo, la potencia impar de un número negativo es un número negativo:*

$$(\pm a)^{2n} = a^{2n} \quad (a > 0),$$
$$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} \quad (a > 0),$$

donde $2n$ es la escritura general de un número par, y $2n + 1$, la escritura general del número impar.

Observación. No hay que confundir las dos expresiones: $(-a)^n$ y $-a^n$; en la primera el signo menos corresponde a la base de la potencia, en la segunda, a la misma potencia.

3. Operaciones con potencias de bases iguales. a) *Al multiplicar potencias de bases iguales se suman los exponentes, y al dividir, se restan:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ejemplos. 1) $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$; 2) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$; 3) $(x + y)^8 : (x + y)^5 = (x + y)^3$.

b) *Al elevar a potencia un producto se puede elevar a esa poten-*

cia cada uno de los factores y multiplicar los resultados obtenidos:

$(abc)^n = a^n b^n c^n.$

A veces es conveniente utilizar la última igualdad en sentido contrario. Por ejemplo, si hay que calcular la magnitud

$A = 8^3 \cdot 25^3 \cdot 2^3,$

obtenemos el resultado más rápidamente, si escribimos $A = (8 \cdot 25 \cdot 2)^3 = 400^3 = (4 \cdot 100)^3 = 64\,000\,000$, que elevando al cubo cada uno de los números 8, 25 y 2 y multiplicando después los resultados obtenidos.

c) *Si se eleva a potencia una fracción, se pueden elevar a esta potencia el numerador y el denominador de la fracción por separado y dividir el primer resultado por el segundo:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ejemplos. 1) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$; 2) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3}$.

d) *Si se eleva a potencia una potencia, los exponentes se multiplican:*

$(a^n)^m = a^{nm}.$

Ejemplos. 1) $(x^2)^3 = x^6$;
2) $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{10}b^{15}$.

Basándonos en las reglas de operaciones con potencias antes formuladas se puede elevar a potencia monomios más complejos. Por ejemplo,

1) $\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^3 = -\frac{1}{8}a^{12}b^6$;

2) $\left(-\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^4 = \frac{(-3xy^2)^4}{(2z^3)^4} = \frac{81x^4y^8}{16z^{12}}$.

Para elevar a potencia un monomio hay que elevar a esta potencia el coeficiente, y multiplicar los exponentes de cada una de las letras por la potencia a la que se eleva el monomio dado.

Observación. En el ejemplo 2) se utilizó esta regla por separado para el numerador y el denominador de la fracción.

4. Cuadrado de un polinomio. *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos más*

el doble de los productos de cada término por los siguientes; por ejemplo:

$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+$
$+2ad+2bc+2bd+2cd.$

De la justeza de la fórmula descripta puede persuadirse con la multiplicación simple del polinomio $a+b+c+d$ por sí mismo.

Ejemplos.

1) $(3x^2+2y^2+xy)^2 = (3x^2)^2+(2y^2)^2+(xy)^2+2\cdot 3x^2 \times$
$\times 2y^2+2\cdot 3x^2\cdot xy+2\cdot 2y^2\cdot xy =$
$= 9x^4+4y^4+x^2y^2+12x^2y^2+6x^3y+4xy^3 =$
$= 9x^4+4y^4+13x^2y^2+6x^3y+4xy^3;$

2) $(a-2b+3c-4d)^2 = a^2+4b^2+9c^2+16d^2+$
$+2a(-2b)+2a\cdot 3c+2a(-4d)+$
$+2(-2b)3c+2(-2b)(-4d)+2\cdot 3c(-4d) =$
$= a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac-8ad-12bc+$
$+16bd-24cd.$

§ 35. Potencia de exponente cero y entero negativo

● DEFINICION 1. Todo número real a, distinto de cero, a la potencia cero (exponente nulo) es igual a la unidad $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Ejemplos. 1) $2^0 = 1$; 2) $(a-b)^0 = 1$ $(a \neq b)$; 3) $-5^0 = -1$; 4) $(-5)^0 = 1$.

● DEFINICION 2. Por potencia de un número real a con exponente entero negativo se sobrentiende la fracción cuyo numerador es igual a 1, y el denominador es una potencia de la misma base, pero de exponente opuesto:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).$$

Observación. Dos números n y $-n$ se denominan *opuestos.*

Ejemplos. 1) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; 2) $a^{-2}\cdot b^{-4} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{b^4} = \frac{1}{a^2b^4}$.

Inversamente: Toda fracción propia con numerador igual a 1, puede escribirse en forma de potencia de exponente negativo:

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}; \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}.$$

Las operaciones con las potencias de exponente nulo y negativo se pueden realizar según las mismas reglas por las que efectuamos estas operaciones con las potencias de exponentes naturales. No vamos a demostrar rigurosamente esta afirmación, sino que comprobaremos en una serie de ejemplos que esto es realmente así. La prueba consiste en realizar cada operación dos veces: la primera vez cambiando los símbolos a^0 y a^{-n} por 1 y $\frac{1}{a^n}$, la segunda vez sin esa sustitución, pero utilizando la regla correspondiente para las potencias de exponentes naturales. Si se encuentra que ambos resultados son idénticos, con ello se demuestra la posibilidad de extender la regla respectiva sobre los nuevos elementos a^0 y a^{-n}.

Producto de potencias ($a \neq 0$)

$$a^0a^{-n} = 1 \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

1) $a^0a^{-n} = a^{0+(-n)} = a^{-n};$

2) $a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)},$

$$a^{-n}a^{-m} = a^{-n+(-m)} = a^{-n-m} = a^{-(n+m)};$$

3) $x^mx^{-n} = x^m\frac{1}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n},$

$$x^mx^{-n} = x^{m+(-n)} = x^{m-n}.$$

Como se aprecia de los ejemplos expuestos, en todos los casos se corrobora que al multiplicar las potencias de bases iguales los exponentes se suman.

División de potencias

1) $a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$

$$a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n};$$

2) $a^0 : a^{-n} = 1 : \frac{1}{a^n} = a^n,$

$$a^0 : a^{-n} = a^{0-(-n)} = a^{0+n} = a^n;$$

3) $a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$

$$a^{-n} : a^{-m} = a^{-n-(-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}.$$

Con esto se prueba que al dividir las potencias de bases iguales los exponentes se restan también cuando estos exponentes son iguales a cero o a un número entero negativo.

Elévación a potencia de una potencia

1) $(a^0)^n = 1^n = 1$,

$(a^0)^n = a^{0n} = a^0 = 1$;

2) $(a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$,

$(a^{-n})^m = a^{-nm}$;

3) $(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm}$,

$(a^{-n})^{-m} = a^{(-n)(-m)} = a^{nm}$.

Observación. Las potencias de exponentes negativos son convenientes puesto que permiten escribir con parsimonia magnitudes muy pequeñas.
Por ejemplo, la masa del electrón $m = 9{,}1085 \cdot 10^{-28}$ g. La constante de gravitación $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ $m^3/g \cdot s^2$. Con tal escritura se aprecia inmediatamente que la masa del electrón está determinada con cinco cifras significativas exactas, y la constante de gravitación, con cuatro cifras significativas exactas.
Para escribir números grandes se utilizan las potencias positivas del número 10.
Por ejemplo: el número de moléculas en 1 cm³ en condiciones normales es igual a $2{,}68713 \cdot 10^{19}$.
Si no se utilizan las potencias con exponentes negativos, el primer ejemplo se escribiría así

$$m = \frac{9{,}1085}{10^{28}} = \frac{91\,085}{10^{32}} = \frac{91\,085}{\underbrace{100\ldots0}_{32\text{ ceros}}}.$$

La escritura del número en forma de producto de sus cifras significativas por la potencia 10 se denomina «escritura con coma flotante». Esta clase de inscripción se utiliza profusamente al trabajar en las computadoras electrónicas.

§ 36. Noción de raíz

Del curso de aritmética se sabe que la adición y la sustracción se denominan *operaciones mutuamente inversas* basándose en que si a un número arbitrario a sumamos al principio el número b y después restamos el mismo número b, el número a no varía:

$(a + b) - b = a$,

o, cambiando el orden de las operaciones,

$(a-b)+b=a.$

De manera semejante, la multiplicación y la división son también operaciones mutuamente inversas, puesto que

$(ab): b=a \ (b \neq 0),$

$(a: b)\cdot b=a.$

La operación inversa a la potenciación se denomina *radicación*; mediante esta operación, si están dados la potencia y su exponente, se busca la base de la potencia; por ejemplo, si

1) $a^3=27$ tendremos que $a=\sqrt[3]{27}=3;$

2) $y^5=-32$ tendremos que $y=\sqrt[5]{-32}=-2.$

La operación de radicación (extracción de raíz) se fija con el signo $\sqrt{\ }$ (radical); además, sobre este signo se escribe el índice de la raíz y sólo en el caso de la raíz cuadrada el índice de raíz 2 no se escribe.

● DEFINICION. *Extraer la raíz n-ésima del número a significa hallar un número x tal, que después de elevar a la potencia n obtenemos el mismo número a*:

$\sqrt[n]{a}=x$, si $x^n=a$.

De esta definición se deduce que $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

1. Regla de los signos. a) *La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales inversos*:

$\sqrt{49}=\pm 7$, puesto que $(\pm 7)^2=49;$

$\sqrt[4]{81}=\pm 3$, puesto que $(\pm 3)^4=81.$

b) *La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el número subradical*:

$\sqrt[3]{64}=4$, puesto que $4^3=64;$

$\sqrt[5]{-32}=-2$, puesto que $(-2)^5=-32.$

c) *La raíz de índice par de un número negativo no es un número real*; por ejemplo, $\sqrt{-9}$ no puede ser ni $+3$, ni -3, puesto que $(\pm 3)^2=9$. Tales raíces se denominan *números imaginarios*, sobre los cuales se verá detalladamente más adelante (véase el cap. XV).

● **2. Raíz aritmética.** DEFINICION. El valor no negativo de la raíz de índice par de un número no negativo se denomina *valor aritmético de la raíz o raíz aritmética*.

Teniendo en cuenta las raíces aritméticas, hay que escribir:

1) $\sqrt{16}=4$,

2) $\sqrt[4]{81}=3$,

3) $\sqrt{(-\alpha)^2}=\begin{cases} \alpha, \text{ si } \alpha \geq 0, \\ -\alpha, \text{ si } \alpha < 0. \end{cases}$

A continuación en este capítulo se estudian solamente las *raíces aritméticas*.

§ 37. Identidades fundamentales en las que se basan las transformaciones de las raíces y las operaciones con ellas

(I) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (por definición de raíz).

(II) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ (propiedad fundamental de la raíz), es decir, *la magnitud de la raíz no varía si su índice y el exponente del radicando se multiplica por un mismo número*.

Empero, toda identidad se puede leer tanto de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda. Al leer la identidad (II) de derecha a izquierda ella toma otro carácter: *el índice de la raíz y el exponente del radicando se pueden dividir por su factor común*.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$; 2) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$; 3) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$.

(III) $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

Al extraer la raíz de un producto se puede extraer la raíz de igual exponente de cada factor y multiplicar los resultados obtenidos.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$;

2) $\sqrt[3]{64 \cdot 343} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = 4 \cdot 7 = 28$.

Si la identidad (III) se lee en sentido inverso (de derecha a izquierda), la formulación será distinta: *al multiplicar raíces (radicales) de índices iguales hay que multiplicar sus expresiones subradicales (radicandos) y extraer la raíz de igual exponente de su producto.*

De este modo, la identidad (III) da la regla de multiplicación de radicales de índices iguales.

E j e m p l o s. 1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$; 2) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$.

Combinando la propiedad fundamental de la raíz (II) con la identidad (III) se puede multiplicar raíces de diferentes índices:

$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^3}$,

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}$.

La extracción del factor fuera del signo radical está basada en la identidad (III):

$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18a^3b}=\sqrt{9a^2\cdot 2ab}=3a\sqrt{2ab}$,

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$.

(IV) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, es decir, *para extraer la raíz de una fracción (cociente), se puede extraer la raíz, de igual exponente, del numerador y denominador por separado y dividir el primer resultado por el segundo.*

La lectura de la identidad (IV) de derecha a izquierda nos da la regla de la división de raíces de índices iguales: *al dividir las raíces de índices iguales se pueden dividir sus expresiones subradicales (radicandos) y extraer la raíz, del mismo exponente, del cociente obtenido.*

Ejemplos. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{3}{10}$;

3) $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2$;

4) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}=\sqrt[6]{4^2}:\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{\frac{16}{8}}=\sqrt[6]{2}$.

(V) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Esta identidad es una consecuencia de la identidad (III). *Al elevar a potencia una raíz se puede elevar a esa potencia el número subradical sin variar el índice de la raíz.*

Ejemplos. 1) $(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$;

2) $(\sqrt[3]{9})^2=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$.

(VI) $\sqrt[n]{a^m}=a^{m:n}$.

Al extraer la raíz de una potencia se puede dividir el exponente

del radicando por el índice de la raíz, si esa división se cumple enteramente.

Ejemplos. 1) $\sqrt{x^4}=x^2$; 2) $\sqrt[3]{27y^6}=\sqrt[3]{3^3y^6}=3y^2$;
3) $\sqrt[4]{81a^{12}b^8}=\sqrt[4]{3^4a^{12}b^8}=3a^3b^2$.

Observación. Al resolver los ejemplos 2) y 3) se utilizaron las identidades (III) y (VI).

(VII) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$, es decir, *al extraer la raíz de una raíz se puede extraer la raíz de grado igual al producto de los índices de las dos raíces, permaneciendo el radicando sin variación.*

Frecuentemente se hace necesario utilizar la identidad (VII) leyéndola de derecha a izquierda; por ejemplo, si se dispone solamente de una tabla de raíces cuadradas o de una regla de cálculo, es conveniente reemplazar la extracción de raíz de cuarto grado por dos extracciones sucesivas de raíz cuadrada:

$$\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}\approx\sqrt{1{,}414}\approx 1{,}19.$$

De modo semejante

$$\sqrt[8]{12}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}}}\approx\sqrt{\sqrt{3{,}46}}\approx\sqrt{1{,}86}\approx 1{,}36.$$

Observación. La exactitud de las fórmulas (II) — (VII) se verifica con un mismo ejemplo: ambos miembros de cada igualdad se elevan a una misma potencia, debido a lo cual se obtienen expresiones idénticas.

§ 38. Extracción de la raíz cuadrada con un grado de exactitud prefijado

En la mayoría de los casos la raíz cuadrada de un número se puede extraer sólo aproximadamente. Vamos a demostrar como se realiza esta operación.

Supongamos que se quiere calcular $\sqrt{3}$ con la exactitud de hasta 0,001. Esto significa que se necesita hallar dos fracciones decimales, que se diferencian entre sí en 0,001, entre los cuadrados de las cuales está comprendido el número 3, es decir, el cuadrado de la fracción menor debe ser menor que 3, y el cuadrado de la fracción mayor debe ser mayor que 3. Se sabe que al elevar una fracción decimal al cuadrado el número de cifras decimales se duplica, por ejemplo
$(1{,}5)^2 = 2{,}25$; $(0{,}012)^2 = 0{,}000144$.

Por eso, se puede obtener tres cifras decimales en la raíz cuadrada sólo a condición de que el número subradical tenga

seis cifras decimales, es decir, esté expresado en millonésimas. En el lugar de las cifras decimales que faltan escribimos ceros y utilizamos el método ordinario de extracción de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{3{,}00'00'00} \approx 1{,}732.$$

```
     1
 ─────────
  27│ 200
   7│ 189
 ─────────
 343│ 1100
   3│ 1029
 ─────────
 3462│ 7100
    2│ 6924
 ─────────
      176 (resto)
```

La fracción 1,732 es el valor aproximado de $\sqrt{3}$ por defecto con la exactitud de hasta 0,001, puesto que $(1{,}732)^2 = 2{,}999824...$ La fracción 1,733 es un valor aproximado de $\sqrt{3}$ por exceso con la exactitud de hasta 0,001, puesto que $(1{,}733)^2 = 3{,}003289...$

E j e m p l o. Calcular $\sqrt{0{,}043818}$ con una exactitud de hasta 0,01. En este caso, en el número subradical conservamos sólo cuatro cifras decimales, las restantes cifras se eliminan:

$$\sqrt{0{,}04'38} \approx 0{,}209 \approx 0{,}21.$$

```
    4
 ─────────
 409│ 3800
   9│ 3681
 ─────────
      119
```

§ 39. Racionalización cuadrada de denominadores

Cuando hay que calcular aproximadamente la magnitud numérica de una fracción, que contiene en el denominador un radical, frecuentemente se hace necesario dividir por un número de muchas cifras, lo que es incómodo. Sin embargo, la fracción dada se puede transformar de manera que el de-

nominador se convierta en un número racional. Esta transformación se denomina «racionalización de denominadores».

E j e m p l o 1. Calcular el valor de la fracción $1/\sqrt{3}$ con tres cifras significativas exactas.

Previamente multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

De la tabla de raíces cuadradas tomamos el valor aproximado de $\sqrt{3}$ con cuatro cifras significativas:

$$\sqrt{3}\approx 1{,}732.$$

En tal caso,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1{,}732}{3}\approx 0{,}577.$$

Aquí se divide mentalmente con facilidad, y, lógicamente, esto es más sencillo que dividir 1 por 1,732.

E j e m p l o 2. Calcular el valor numérico de la fracción $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ con la exactitud de hasta 0,001.

Multiplicamos el numerador y el denominador por $3+\sqrt{2}$;

$$\frac{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}\approx\frac{3\cdot 1{,}414+2}{7}=\frac{6{,}242}{7}\approx 0{,}892.$$

El cálculo sin la racionalización previa del denominador exige un gran esfuerzo debido a la inevitabilidad de la división por números de muchas cifras:

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\approx\frac{1{,}414}{3-1{,}414}=\frac{1{,}414}{1{,}586}\approx 0{,}892.$$

§ 40. Tipo elemental de radical. Semejanza de radicales

Se admite considerar a un radical de *tipo elemental* cuando: a) la expresión subradical no contiene fracciones; b) los factores se sacan fuera del signo radical; c) el índice le la raíz y el exponente del radicando se reducen a un factor común. Los siguientes ejemplos ilustran la reducción de los radicales a la forma elemental:

1) $\sqrt{32a^3b^4}=\sqrt{16a^2b^4 2a}=4ab^2\sqrt{2a}$;

2) $\sqrt{\frac{8ab}{3c}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2ac\cdot 3c}{(3c)^2}}=\frac{2}{3c}\sqrt{6abc}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{ab}}=\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)\,a^2b^2}{a^3b^3}}=$

$=\frac{1}{ab}\sqrt[3]{(a^2+b^2)\,a^2b^2}$;

4) $xy\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\sqrt{x^2y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=\sqrt{xy^2-x^2y}=$

$=\sqrt{xy\,(y-x)}\quad (y>x>0)$.

● DEFINICION. Dos o varios radicales se denominan *semejantes*, si se diferencian sólo por los coeficientes, pero tienen idénticas expresiones subradicales e iguales índices del radical o no difieren en nada. Serán semejantes, por ejemplo, $3\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; $a\sqrt{x+y}$ y $\frac{b}{c}\sqrt{x+y}$.

Frecuentemente los radicales aparentan ser no semejantes; sin embargo, después de reducirlos a la forma elemental se puede descubrir su semejanza.

Ejemplos. 1) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{\frac{1}{8}}$ son semejantes, puesto que $3\sqrt{\frac{1}{2}}=3\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$;

2) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$ son semejantes, puesto que

$\sqrt[3]{4a^4b^2}=a\sqrt[3]{4ab^2}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{4ab^2}{8a^3b^3}}=\frac{1}{2ab}\sqrt[3]{4ab^2}$.

Los radicales semejantes se reducen del mismo modo que los monomios racionales semejantes, lo que se aprecia de la siguiente comparación:

$3xy+5xy-6xy=2xy,\quad 3\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-6\sqrt{ab}=2\sqrt{ab}$.

$mx-nx+px=(m-n+p)\,x$,

$m\sqrt[3]{a(b+c)}-n\sqrt[3]{a(b+c)}+p\sqrt[3]{a(b+c)}=$

$=(m-n+p)\sqrt[3]{a(b+c)}$.

§ 41. Adición y sustracción de radicales

Al sumar o restar radicales se relacionan entre sí con el signo más o menos y se reducen a radicales semejantes, si éstos

existen. Por ejemplo,

$$(2\sqrt{20}+5\sqrt{8})-\left(3\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{98}\right)=$$

$$=2\sqrt{20}+5\sqrt{8}-3\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{98}=$$

$$=4\sqrt{5}+10\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{5}+7\sqrt{2}=3{,}4\sqrt{5}+17\sqrt{2}.$$

§ 42. Multiplicación y división de expresiones irracionales más complejas

En el § 37 al estudiar las identidades fundamentales se demostró cómo se multiplican y se dividen los radicales en los casos elementales.

Al multiplicar y dividir polinomios irracionales se utilizan las mismas reglas que al multiplicar y dividir polinomios racionales.

E j e m p l o s.

1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})=$

$$=3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=$$

$$=21\cdot 2-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-10\cdot 3=12+\sqrt{6};$$

2) $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}=2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}}-x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}}=$

$$=\frac{2ab}{b}\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}=2a\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}.$$

§ 43. Transformación de un radical complejo

La expresión irracional de la forma

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

donde A y B son números racionales positivos, B no es cuadrado perfecto, se denomina *radical complejo*. Este radical puede ser transformado en la forma

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

La justeza de la fórmula (1) se puede verificar elevando al cuadrado ambos miembros, teniendo en cuenta que todas las radicales son aritméticas. Efectuemos esto para el caso en que se toman en todas partes los signos superiores. El cuadrado del primer miembro

$$\left(\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}.$$

El cuadrado del segundo miembro

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=A+\sqrt{A^2-(A^2-B)}=A+\sqrt{B}.$$

Puede creerse que esta transformación no es conveniente, puesto que el segundo miembro de la identidad contiene dos radicales complejas, y el primer miembro, sólo uno. No obstante, cuando la expresión A^2-B es un cuadrado perfecto, en el segundo miembro de la identidad obtenemos la suma o la diferencia de dos radicales simples, entonces tiene sentido utilizar la transformación del radical complejo.

Ejemplos.

1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}-\sqrt{\frac{-2\sqrt{4-3}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2});$

2) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$

§ 44. Potencia de exponente fraccionario

Definición 1. La potencia de *exponente fraccionario positivo*, es decir, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ (m y n son números enteros positivos), denota una raíz cuyo índice es igual a n, y la expresión subradical (radicando), igual a a^m

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (a>0).$$

Ejemplos. 1) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; 2) $(a+b)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(a+b)^2}$; 3) $(xy)^{\frac{1}{3}}=$ $=\sqrt[3]{xy}$.

Por el contrario, toda radical se puede representar en forma de potencia de exponente fraccionario (racional):

1) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{(x-y)}=(x-y)^{\frac{1}{2}}$, donde $x\geqslant y$;

3) $\sqrt[5]{b^3}=b^{\frac{3}{5}}$.

Definición 2. La potencia de *exponente fraccionario negativo*, es decir, la expresión $a^{-\frac{m}{n}}$ (m y n son números enteros positivos), denota la magnitud inversa de la expresión $a^{m/n}$:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{m/n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Las potencias de exponentes fraccionarios se prestan a las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación según las mismas reglas que las potencias de exponentes enteros, si las bases de las potencias son iguales entre sí.

Producto:

$$a^{m/n}a^{p/q}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[np]{a^{mq+pn}}=$$
$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

es decir, los exponentes también se suman al multiplicar las potencias de exponentes fraccionarios.

Ejemplo. $8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}\sqrt{8^3}=$

$$=\frac{1}{4}\cdot 8\sqrt{8}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}.$$

Ahora multipliquemos sin sustituir los factores por los radicales:

$$8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=8^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=8^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{8^5}=\sqrt[6]{2^{15}}=4\sqrt{2}.$$

División:

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=$$
$$=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

es decir, al dividir las potencias de exponentes fraccionarios se restan los exponentes.

Se deja a los estudiantes verificar que tanto en la potenciación de una potencia, como en la radicación de una potencia se convervan las reglas de operaciones anteriores con potencias.

Ejemplos.

1) $3^{\frac{1}{2}} : 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^1 = 3;$

2) $(2^{-4})^{-\frac{1}{2}} = 2^2 = 4;$

3) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (4{,}5)^0 =$

$= \left[\left(\frac{3}{10}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{256^3} - \frac{1}{3} + 1 = \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} + (\sqrt[4]{256})^3 +$

$+ \frac{2}{3} = \frac{10}{3} + 4^3 + \frac{2}{3} = 68.$

§ 45. Ejemplos de todas las operaciones con radicales

Ejemplo 1. Simplificar la expresión

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x}\right),$$

$0 < x < 1$.

Realizamos las operaciones sucesivamente, comenzando con las expresiones encerradas entre paréntesis:

$$1)\ \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

A continuación simplificamos la expresión encerrada en el segundo paréntesis:

$$2)\ \sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\sqrt{1-x^2}-1).$$

3) Multiplicamos los resultados de las operaciones anteriores:

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,\frac{1}{x}\,(\sqrt{1-x^2}-1) = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2} =$$

$$= \frac{1-x^2-1}{x^2} = -1.$$

Ejemplo 2. Simplificar y calcular la expresión

$$\frac{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{para} \quad z=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(a>0;\ \ n>m>0)$.

Calculamos al principio las dos expresiones

$$A=(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad B=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tenemos que

$$A=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}+1\right]\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[a^2\frac{(m+n)^2}{2mn}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}.$$

Análogamente hallamos B:

$$B=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2-a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2-2mn}{2mn}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{a^{-1}(n-m)^{-1}}{(2mn)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}.$$

Aquí al calcular la expresión $[m^2+n^2-2mn]^{-\frac{1}{2}}$ hay que tener en cuenta que $m^2+n^2-2mn=(m-n)^2=(n-m)^2$. Pero, $\sqrt{m^2+n^2-2mn}=\sqrt{(m-n)^2}=\pm(m-n)$, y puesto que $n>m$, el valor aritmético del radical

$$\sqrt{(m-n)^2}=n-m.$$

Después de calcular las magnitudes auxiliares A y B, tendremos:

$$\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}+\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}-\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}=\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n-m}\right)}{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n-m}\right)}=$$

$$=\frac{n-m+n+m}{n-m-n-m}=\frac{2n}{-2m}=-\frac{n}{m}.$$

▲ **Ejercicios**

1. Calcular

1) 2^4, $(-3)^4$, 4^3, $(-5)^3$;

2) $13\cdot 2^3 - 9\cdot 2^3 + 15\cdot 2^3 + 6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$;

3) $a^2 + (-a)^2$, $(-2a)^2$, $(-2a)^3$, $(-a)^{2n}$; $(-a)^{2n+1}$;

4) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$.

2. Simplificar la expresión

$x^3 + 2x^2 - 3x - (-x)^3 + 3(-x)^2 - 5x + 2$.

3. Realizar las operaciones indicadas: $(3\cdot 4)^2(2\cdot 3\cdot 4)^3$; $(2xy)(-4xyz)^3$; $(-a)^4(2b)^4$, $(-2x)^3(-3y)^3$;

$24\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

4. Calcular: 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; 2) $(1,5)^4$; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2xy}{z}\right)^4$; 5) $\left(\frac{4ab}{3c}\right)^3$; 6) $\left(\frac{7}{2}\right)^3 : \left(\frac{7}{3}\right)^3$; 7) $\left(\frac{a}{2b}\right)^n\left(\frac{b}{3c}\right)^n\left(\frac{2c}{a}\right)^n$, 8) $\frac{(x^2-y^2)^n}{c^2-d^2}\times$ $\times\frac{(c+d)^n}{x-y}\frac{(c-d)^n}{x+y}$.

5. Calcular: 1) $(2^3)^3$; 2) $[(-3)^2]^3$; 3) $(x^{n-1})^2$; 4) $(x^2y^3)^{2n-1}$; 5) $(-b^2)^3$, 6) $(a^2)^3\cdot(a^3)^4$; 7) $\left(\frac{2x^2y^3}{-3z^5}\right)^4$; 8) $\left(\frac{a^7}{b^x}\right)^m(b^x)^m a^m$; 9) $\left(-\frac{3x^{n-1}}{4y^{n+1}}\right)^m$.

6. Simplificar la expresión $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3\left(\frac{1}{a+b}\right)^2\left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

7. Llevar el factor racional bajo el signo radical:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{0,6}$; 3) $4\sqrt{0,5}$; 4) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; 5) $x\sqrt{\frac{ab}{x}}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$; 7) $ab^2\sqrt{c}$; 8) $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; 9) $3\sqrt{3\frac{1}{3}}$; 10) $\frac{a}{2c}\sqrt{\frac{c}{a}}$; 11) $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}$; 12) $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a-b}}$; 13) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$; 14) $2a\sqrt[3]{b}$; 15) $xy\sqrt[3]{\frac{a}{xy}}$.

8. Sin extraer la raíz determinar ¿cuál de los números es mayor: 1) $2\sqrt{3}$ ó $3\sqrt{2}$? 2) $5\sqrt{3}$ ó $3\sqrt{10}$?

9. Transformar las siguientes raíces en la forma elemental:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{17}{81}}$; 3) $\sqrt{\frac{72}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 6) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$; 7) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 8) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; 9) $c\sqrt{\frac{x}{c^3}}$; 10) $2ax\sqrt{\frac{3}{2ax}}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$; 12) $\sqrt{2x^2-4x+2}$; 13) $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{2ab}{3m^2n}}$; 14) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$; 15) $b\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^2}}$; 16) $\sqrt[5]{\frac{mn}{8a^4b^3}}$.

10. Utilizando el valor aproximado de $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, calcular:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

11. Reducir a la forma elemental y revelar la semejanza:

1) $\sqrt{8}$ y $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{40}$ y $\sqrt{90}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ y $3\sqrt{18}$; 4) $\frac{2}{x}\sqrt{x^3y}$, $\frac{3}{y}\sqrt{xy^3}$ y $xy\sqrt{\frac{1}{xy}}$; 5) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ y $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{0{,}001xy^2}$ e $y\sqrt[3]{\frac{0{,}027x}{y}}$; 8) $\sqrt{\frac{c}{ac-bc}}$ y $\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

12. Sumar y restar las siguientes raíces:

1) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}$;

3) $(\sqrt{ab}-2a\sqrt{b})+(4a\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$;

4) $a\sqrt[3]{ab^4}+b\sqrt[3]{a^4b}+\sqrt[3]{a^4b^4}-3ab\sqrt[3]{ab}$;

5) $3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0{,}1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

6) $\sqrt{1-x^2}+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

7) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}}-\frac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b}+\frac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3}-b\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

13. Reducir a común índice las siguientes raíces:

1) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[6]{32}$; 3) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{3ab}$ y $\sqrt{2c}$.

14. Multiplicar y dividir los siguientes ejemplos:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{4a^3}$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$;

5) $\sqrt{2a}:\sqrt[4]{a}$; 6) $\sqrt[3]{16}:\sqrt{2}$; 7) $\sqrt[3]{2xy}:3\sqrt{xy}$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$.

15. Realizar las operaciones indicadas con las raíces:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4.5}$; 4) $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt[8]{2}$;

5) $\sqrt[5]{x^2}\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt{12}:\sqrt{13}$; 7) $2\sqrt{10}:\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2{,}5}$; 8) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$;

9) $4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$; 10) $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;

11) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$; 12) $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}):\sqrt[3]{2}$;

13) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 14) $(a-b\sqrt{c}+m\sqrt{b}):a\sqrt{bc}$;

15) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$; 16) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;

17) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{ab}$; 18) $(5-2\sqrt{3})\cdot(6+5\sqrt{3})$;

19) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})(8\sqrt{3}-3\sqrt{2})$; 20) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$;

21) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 22) $\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}$;

23) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$.

16. Elevar a potencia las siguientes expresiones:

1) $(2\sqrt{a})^2$; 2) $(\sqrt[3]{a})^4$; 3) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^4$; 4) $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$; 5) $(\sqrt[3]{3a^2})^9$;

6) $(ab\sqrt{c})^4$; 7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; 8) $(a-b\cdot\sqrt{x})^2$; 9) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;

10) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$; 11) $(a+\sqrt{4+a^2})^2$; 12) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;

13) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$; 14) $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$;

15) $(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})^2$; 16) $(\sqrt{2}p+\sqrt{3}q)^3$; 17) $(\sqrt{2p}+\sqrt{3q})^3$;

18) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^2(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})^2$; 19) $\left(\sqrt[n]{p^2-q^3}\right)^{2n}$;

20) $(\sqrt[n]{2^3})^{nm}$.

17. Simplificar los radicales: $\sqrt{\sqrt{18}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

18. Racionalizar los denominadores:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$;

7) $\frac{m}{\sqrt{\frac{p}{q}}}$; 8) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 10) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

12) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; 13) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; 14) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$; 15) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

16) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$; 17) $\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 18) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

19) $\frac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 20) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

19. Simplificar la expresión $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

20. En la expresión $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ sustituir x por $\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ y simplificar.

21. ¿Qué forma simple adquiere la expresión $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, si se sustituye

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]\quad (0<b<a)?$$

22. Calcular el valor de y para $x=\frac{2ab}{b^2+1}$; si

$$y=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$

23. Simplificar la expresión

$$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}.$$

24. Calcular el valor de y para $x=\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}$, si

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

25. Simplificar las expresiones:

1) $\frac{a}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$;

2) $\frac{a^2}{2}\,\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)$;

3) $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

4) $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$;

5) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+\frac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

26. Escribir los siguientes radicales en forma de potencias de exponentes fraccionarios:

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{a^2}$; 3) $\sqrt[5]{x^3}$; 4) $\sqrt{a+b}$; 5) $\sqrt{a^2+b^2}$; 6) $\sqrt[3]{x-y}$;
7) $\sqrt[5]{ab^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{m+n}}$; 11) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-y}}$;
12) $\frac{3ab}{\sqrt[5]{(a+b)^2}}$; 13) $\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$.

27. Calcular, sustituyendo las potencias fraccionarias por los correspondientes radicales:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $16^{\frac{3}{4}}$; 4) $64^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 7) $(-2)^{-\frac{2}{3}}$;

8) $(x+y)^{\frac{2}{3}}$; 9) $(a-b)^{-\frac{3}{2}}$; 10) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 11) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-\frac{1}{5}}$;

12) $(125)^{\frac{2}{3}}+(0{,}01)^{-0{,}5}$; 13) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$.

28. Realizar las operaciones indicadas:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\cdot ab^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$; 4) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{3}$;

5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$; 6) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 7) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

8) $\left(125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 9) $\left[\frac{1}{4}\left(0{,}027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0{,}0016^{\frac{3}{4}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$;

10) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$; 11) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\,a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$;

12) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\,\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$.

29. Simplificar las expresiones:

1) $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}-\dfrac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$;

2) $\left\{\left[\left(\dfrac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\dfrac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}}$;

3) $\sqrt{\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}$;

4) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$;

5) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$.

30. Calcular

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$$

para $x=\dfrac{1}{a-1}$ $(a\neq 1)$.

31. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}-2\sqrt[3]{xy}\right)^{6}$; 2) $\dfrac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^{4}\sqrt[5]{a^{-2}}}}$;

3) $\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)ab\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-1}+\sqrt[3]{ab^{2}}$ $(a\neq b)$;

4) $\left[(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1}+3\sqrt{xy}\right]^{\frac{1}{2}}$ $(x>0;\ y>0)$.

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES SOBRE FUNCIONES. TRINOMIO CUADRADO Y SU REPRESENTACION GRAFICA

§ 46. Introducción

Los conocimientos elementales sobre las funciones y sus gráficas ya fueron adquiridos en la escuela media. Por eso, en los primeros párrafos de este capítulo examinaremos solamente, en forma concisa, las nociones fundamentales y las definiciones. El nuevo material se expone detalladamente y se ilustra con una gran cantidad de ejemplos.

§ 47. Nociones fundamentales y definiciones

● DEFINICIÓN 1. Una magnitud se denomina *constante* si en las condiciones de estudio dado (observación, experimento, etc.) conserva el mismo valor.

Ejemplos de magnitudes constantes: 1) la relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro; 2) la acelaración de la gravedad g en un punto dado de la superficie terrestre; 3) la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

● DEFINICIÓN 2. Una magnitud se denomina *variable* si en estudio o proceso dado ella adquiere distintos valores.

Ejemplos de magnitudes variables: 1) la distancia que separa a un paracaidista de la superficie de la Tierra después de haberse lanzado del avión; 2) el ángulo visual bajo el cual se ve un objeto que se aleja del observador (avión, figura humana, tanque, etc.); 3) la velocidad de salida de un líquido del recipiente a través del orificio a presión variable (altura de caída); 4) la temperatura del aire en el transcurso de un día.

En ciertas condiciones una misma magnitud puede resultar constante y en otras, variable. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad g será una magnitud variable si se mide en distintas latitudes de la superficie terrestre: en el polo g es mayor que en el ecuador (para Moscú $g = 9{,}81$ m/s^2). Las magnitudes constantes se admiten en indicar con las

primeras letras de alfabeto latino: $a, b, c, \ldots$, las magnitudes variables, por x, y, z, u, v.
En matemáticas se apartan del sentido físico de las magnitudes variables que intervienen en uno u otro proceso, y se interesan sólo de la correlación entre los valores numéricos de las magnitudes variables. Esto conduce a una de las más importantes nociones de matemáticas, a la noción de *función*.

● DEFINICION 3. La magnitud y se denomina *función* de la variable x, si a cada valor de x del conjunto numérico dado corresponde, según cierta ley, un valor completamente determinado de y. La variable x se denomina *argumento* o *variable independiente*, la magnitud y, *variable dependiente* o *función*. Se dice que las variables x e y están relacionadas entre sí por una dependencia funcional, y se escribe $y = f(x)$ («y es igual a una función f de x»). Por la notación $y = f(x)$ se sobrentiende la regla por la cual a cada valor considerado de x corresponde un valor determinado de y; por ejemplo, si $y = \frac{x}{1+x^2}$, para hallar y hay que:
1) elevar al cuadrado el argumento x,
2) sumar la unidad al cuadrado del argumento,
3) dividir x por la suma $1 + x^2$.
Volviendo a los ejemplos considerados se puede decir que 1) la distancia que separa al paracaidista de la superficie de la Tierra es una función del tiempo;
2) el ángulo bajo el cual se ve el objetivo desde un punto dado, es función de la distancia hasta el objetivo;
3) la velocidad de salida del líquido del recipiente es función de la altura del nivel del líquido sobre el orificio, a través del cual se vuelca el líquido.

Observación. Existen funciones dependientes de dos, tres y más magnitudes variables.

Ejemplos. 1. La intensidad de la corriente I depende de la tensión E y de la resistencia R: $I = \frac{E}{R}$.
2. El volumen de un paralelepípedo rectangular es función de tres de sus medidas a, b y c: $v = abc$.
En adelante estudiaremos las funciones de un solo argumento.

§ 48. Métodos de planteo de las funciones

La correspondencia entre los valores de las variables x e y puede ser dada por distintos métodos.

1. Método tabular. La función puede ser dada mediante una tabla. Este método de dar las funciones consiste en que los valores numéricos se disponen en línea (o en columna) y ante cada valor del argumento se colocan los correspondientes valores de la función:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n	...
y	y_1	y_2	y_3	y_4	..	y_n	...

Por este principio se han construido las tablas ya conocidas de los cuadrados, cubos, raíz cuadrada, raíz cúbica, etc. De ordinario se forman las tablas para varias funciones; por ejemplo, en todas las guías técnicas se puede encontrar la siguiente tabla en la que el argumento está designado con la letra n en lugar de la notación ordinaria x.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi n^2}{4}$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1	0,785
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,500	3,142
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,333	7,069

Hemos mostrado sólo el comienzo de la tabla. Aquí se han tabulado 9 funciones distintas. En la primera columna están dispuestos los valores del argumento con iguales intervalos, es decir, a una unidad, para las nueve funciones. Consideramos que el empleo de esta tabla no presenta ninguna dificultad. Aunque la tabla está compuesta sólo para valores enteros del argumento n en los límites de 1 a 100 no obstante, presenta una gran ventaja: inmediatamente, sin cálculo alguno, hallamos el valor de cualesquiera de las nueve funciones. Por ejemplo, para $n = 3$ obtendremos $\sqrt[3]{10n} = \sqrt[3]{30} = 3{,}107$. Cabe decir que debido al estudio experimental de un fenómeno o proceso cualquiera (prueba de aviones, motores, rendimiento de semillas, etc.) siempre se establece la dependencia funcional entre variables en forma de tabla.

2. Método analítico. Se dice que una función está dada analíticamente, si se da la fórmula que indica qué operaciones y en qué orden hay que realizar con los valores del argumento x y ciertos datos numéricos, para obtener los correspondientes valores de la función.

Ejemplos. 1. Si $y=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$, para el valor dado de $x=5$ la función y es igual al valor aritmético de la raíz cuadrada del cociente: $\sqrt{\frac{5}{5^2+1}}=\sqrt{\frac{5}{26}}\approx 0{,}437$.
2. Si $y = x^3 + 5x^2 - x + 4$, para $x = 2$ hallamos el correspondiente valor de la función, que designamos del siguiente modo:

$$y|_{x=2} = y\,(2) = 2^3 + 5\cdot 2^2 - 2 + 4 = 30.$$

En general la notación simbólica $f\,(a)$ o $y\,(a)$ denota el valor de la función $f\,(x)$ que ella adquiera para un argumento igual al número a. De otro modo, se puede decir que $f\,(a)$ es un valor particular de la función correspondiente al valor del argumento $x = a$.
En ciertos casos la función no se da con una fórmula, sino con varias, para los distintos intervalos de variación del argumento.

Ejemplo. $y=\begin{cases} 2x-1, \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -x+8, \text{ si } 3< x\leqslant 5. \end{cases}$

El planteo de la función mediante una fórmula tiene la ventaja de que por la fórmula los valores de la función pueden ser calculados, rápidamente, para cada valor admisible de x con la exactitud necesaria, si se utilizan los medios de la técnica de cálculo moderna.
El inconveniente del método analítico es que por la fórmula no se puede juzgar sobre carácter de variación de la función. A pesar de esta desventaja el método analítico predomina en las matemáticas, a él está adaptado el aparato matemático de estudio de la función.
3. Método gráfico. La dependencia entre el argumento x y la función y se puede representar en forma de cierta línea (generalizando, por una curva); la abscisa de cualquier punto de esta curva representa cierto valor del argumento x; la ordenada, el correspondiente valor de la función y.

● DEFINICION. Se denomina *gráfica de la función* $y = f\,(x)$ el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la igualdad $y = f\,(x)$.

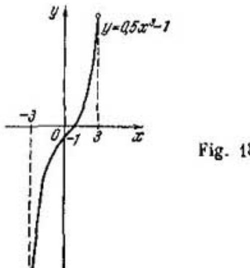


Fig. 18.

Para trazar la gráfica o curva de la función, dada por la fórmula, corrientemente se procede del siguiente modo:
1) Se forma la tabla de los valores del argumento x y los correspondientes valores de la función y.
2) Se elige el sistema de coordenadas xOy y la unidad de escala de cada uno de los ejes (no es indefectible que sea la misma para ambos ejes).
3) Cada par de valores de x e y, puestas en la tabla, se toma como coordenadas del punto y se trazan estos puntos.
4) Los puntos trazados se unen a mano o mediante una plantilla de dibujo.
Es evidente que cuanto más puntos se hayan trazado, tanto más exacta es la gráfica (curva) de la función.
El método gráfico de dar la función es cómodo pues muestra claramente el modo de variación de la función: en qué intervalos de variación del argumento la función crece y en cuáles decrece, cuando la función tiende a cero.
La representación gráfica de la dependencia funcional se utiliza profusamente en la ciencia y la técnica moderna, donde los gráficos son producidos por los autorregistradores
Veamos algunos ejemplos:
1) En medicina el trabajo del corazón se juzga por el cardiograma, producido por el *cardiógrafo*.
2) El *sismógrafo* reproduce las oscilaciones de la corteza terrestre; gracias a él se puede determinar el lugar del terremoto y su intensidad.
3) El *vibrómetro* registra las oscilaciones de diferentes construcciones, por ejemplo, puentes, buques, etc.
Ejemplos semejantes se pueden citar de los más variados campos de la ciencia.

El método gráfico de representación de la función presenta inconvenientes como:

1) la precisión relativamente pequeña con la que se puede leer los valores del argumento y de la función según la gráfica;

2) la limitación del intervalo en el que puede ser construida la curva.

E j e m p l o. Trazar la curva de la función $y = 0{,}5x^3 - 1$ en el segmento $[-3, 3]$.

Formemos la tabla de valores

x	−3	−2,5	−2		−1,5	−1
$y=0{,}5x^3-1$	−14,5	−8,8	−5		−2,7	−1,5
x	0	1	1,5	2	2,5	3
$y=0{,}5x^3-1$	−1	$-\frac{1}{2}$	0,7	3	6,8	12,5

Por los 11 puntos obtenidos trazamos una curva suave denominada *parábola cúbica* (fig. 18).

§ 49. Región de definición de la función

Se denomina *región de definición* de una función el conjunto de puntos del eje numérico, en los que la función tiene valores reales completamente definidos. Aclaremos lo dicho con una serie de ejemplos.

E j e m p l o 1. Hallar la región de definición de la función $y = 1 - x^2$. Para cualquier valor real de x la función y adquiere también valores reales; por eso, su región de definición es todo el eje numérico (de abscisas), o el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

E j e m p l o 2. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

La función dada está definida para valores del argumento $x \neq \pm 1$; su región de definición se compone de tres intervalos:

$(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Ejemplo 3. $y = \sqrt{9-2x} + \sqrt{x-3}$.
La región de definición de la función dada puede ser hallada con la resolución del sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 9-2x \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0. \end{cases}$$

La región buscada se expresa del siguiente modo: $3 \leqslant x \leqslant 4{,}5$.

Ejemplo 4. $f(x) = \sqrt[4]{-x} + \sqrt{x}$.
Los radicandos no deben ser negativos, es decir,

$$\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Este sistema de desigualdades se satisface con el único valor de $x = 0$. De este modo, la función dada está definida sólo en un punto $x = 0$, además $f(0) = 0$.
Cuando la función expresa una dependencia entre variables en condiciones concretas de cierta investigación, se puede considerar que la región de definición de la función y *la región de los valores admisibles del argumento* no es lo mismo.
Así, por ejemplo, para la caída libre de un cuerpo (sin considerar la resistencia del aire), el camino recorrido S en función del tiempo t se expresa por la función $S = \frac{gt^2}{2}$, la que está definida (según el sentido de la variable t) para $t \geqslant 0$. Si nos abstraemos de la naturaleza física de las variables t y S, en tal caso la función de tipo $S = \frac{gt^2}{2}$ está definida en todo el eje numérico (t).

§ 50. Algunas propiedades de las funciones utilizadas al construir las gráficas

La construcción gráfica de la función se simplifica si por la ecuación $y = f(x)$ se pueden descubrir algunas propiedades de la función dada.

● DEFINICION 1. La función $f(x)$ se denomina *par* si el cambio de signo del argumento no modifica el valor de la función, es decir, $f(-x) = f(x)$.
La gráfica de la función par es una curva simétrica con respecto al eje de ordenadas (fig. 19).

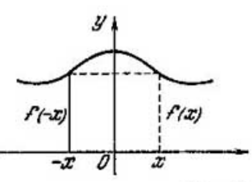


Fig. 19.

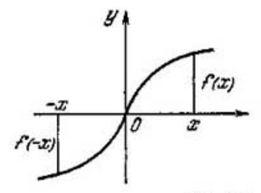


Fig. 20.

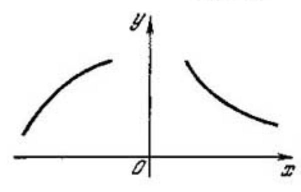


Fig. 21

E j e m p l o s de funciones pares. 1) $y = 3 - x^2$; 2) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 3) $y = \sqrt{9 - x^2}$.

● DEFINICION 2. La función $f(x)$ se denomina *impar*, si el cambio de signo del argumento modifica solamente el signo de la misma función sin variar su magnitud absoluta, es decir,

$$f(-x) = -f(x).$$

La gráfica de la función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas (fig. 20).

E j e m p l o s de funciones impares. 1) $y = 3x$; 2) $y = \frac{1}{x}$;

3) $y(x) = \frac{1}{2} x^3 - 5x$.

De acuerdo a la definición, la función impar (ejemplo 3) se verifica del siguiente modo:

$$y(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 5(-x) = -\left(\frac{1}{2} x^3 - 5x\right) = -y(x).$$

Sin embargo, existen funciones, como, por ejemplo, $y = 2x + 1$ ó $y = x^2 - x + 3$, que no son ni pares, ni impares.

● DEFINICION 3. Una función se llama *creciente* en un intervalo dado si al valor mayor del argumento de este intervalo le corresponde el valor mayor de la función,

La gráfica de una función creciente es una curva ascendiente, si se desplaza por el eje Ox en sentido positivo (fig. 21, izquierda).

● DEFINICIÓN 4. Una función se denomina *decreciente* en un intervalo si al valor mayor del argumento de este intervalo le corresponde el valor menor de la función.
La gráfica de la función decreciente es una curva descendiente, si se mira de izquierda a derecha (fig. 21, derecha).

Ejemplo 1. Demostrar que la función $y = kx + b$, para $k > 0$ crece, y para $k < 0$ decrece.
Supongamos que x_1 y x_2 son dos valores del argumento, además $x_2 > x_1$. Hay que cerciorarse de que $y_2 > y_1$ para $k > 0$ e $y_2 < y_1$ para $k < 0$.
Al valor del argumento x_1 le corresponde el valor de la función

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Al valor del argumento x_2 le corresponde

$$y_2 = kx_2 + b.$$

Restando la primera igualdad de la segunda, hallamos:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Cuando $k > 0$ el segundo miembro de la igualdad es positivo, como producto de dos números positivos, por lo que también el primer miembro es positivo, es decir, $y_2 - y_1 > 0$, o $y_2 > y_1$, y esto precisamente denota que la función y crece.
Si $k < 0$ tendremos que: $k(x_2 - x_1) < 0$, es decir, $y_2 - y_1 < 0$, ó $y_2 < y_1$; por lo tanto, la función $y = kx + b$ decrece.

§ 51. Función lineal y su representación gráfica

● DEFINICIÓN. La función de tipo $y = kx + b$ se denomina *lineal*. En una serie de ejemplos de física, mecánica y otras ciencias se puede indicar donde las dependencias entre variables se expresan por funciones lineales. Veamos algunos ejemplos. 1) Por acción de la carga variable x la longitud de una barra que trabaja a la tracción varía en los límites de la deformación elástica conforme a la ley

$$l = l_0 + kx,$$

donde l_0 es la longitud inicial (sin carga); k, el alargamiento por unidad de carga.
2) Si calentamos una masa de gas dada v_0, tomada a la temperatura de 0° C, a la presión constante p el volumen de gas v aumentará al elevarse la temperatura t por la ley

$$v = v_0 + v_0\alpha t = v_0 (1 + \alpha t),$$

donde α es el coeficiente de dilatación cúbica de dicho gas.
3) El camino recorrido por un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme, varía según la ley

$$S = v_0 t + S_0,$$

donde v_0 es una constante de la velocidad de movimiento, S_0 es el camino inicial.
Formemos la tabla de valores de la función lineal para los valores dados de x_1, x_2, x_3, . . . del argumento por la fórmula $y = kx + b$:

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

Representemos cada par de números $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$, ... en forma de punto en el plano. Obtendremos una serie de puntos: M_1, M_2, M_3, . . .
Si trazamos una recta por cualesquiera de los dos puntos obtenidos, resulta que esta recta pasa también por los restantes puntos construidos. Sin embargo, no tenemos la certidumbre de que todo nuevo punto, que aún no se ha construido, pero que puede ser trazado si se continúa la tabla, se encuentre sobre esta recta. Esto aún lo tendremos que demostrar.

T e o r e m a. *Todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = kx + b$, se encuentran sobre una recta.*
Tomemos dos puntos M_0 y M_1, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = kx + b$. Demostremos que un tercer punto cualquiera M_2 también se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos M_0 y M_1, si las coordenadas del punto M_2 satisfacen la ecuación $y = kx + b$.

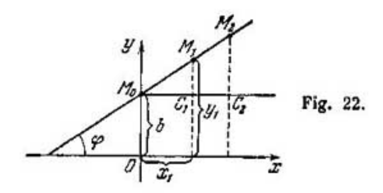


Fig. 22.

■ DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las coordenadas de los puntos M_0 $(0;\ b)$ y M_1 $(x_1;\ y_1)$ satisfacen la ecuación dada $y = kx + b$. En tal caso tendremos dos identidades:

$$b = k\cdot 0 + b, \tag{1}$$

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2}$$

Restamos miembro a miembro de la igualdad (2) la igualdad (1). Para $x_1 \neq 0$ obtendremos $y_1 - b = kx_1$, de donde

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = k. \tag{3}$$

Trazamos la recta por los puntos M_0 y M_1 (fig. 22). Demostremos que el punto M_2 está en la recta M_0M_1.
Según la condición tenemos $y_2 = kx_2 + b$ y además $b = k\cdot 0 + b$, de donde $y_2 - b = kx_2$, es decir,

$$\frac{y_2 - b}{x_2} = k. \tag{4}$$

Comparando las igualdades (3) y (4), obtendremos

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2}. \tag{5}$$

La igualdad (5) denota que las relaciones de los catetos semejantes de los triángulos rectángulos $M_0C_1M_1$ y $M_0C_2M_2$ son iguales (fig. 22), por lo cual los triángulos son semejantes. De la semejanza se deduce que el ángulo $M_1M_0C_1$ es igual al ángulo $M_2M_0C_2$, y por eso los lados M_0M_2 y M_0M_1 se confunden, o, dicho de otro modo, los tres puntos M_0, M_1 y M_2 se encuentran sobre una recta.
Ahora queda por demostrar que cualquier punto M_3, cuyas coordenadas no satisfacen la ecuación $y = kx + b$ no se encuentran sobre la recta M_0M_2. Proponemos la demostración de esto último al lector.
Cabe señalar que la constante k se denomina *coeficiente angular* de la recta (pendiente) y caracteriza la velocidad de un

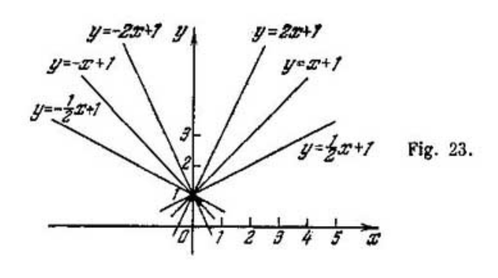


Fig. 23.

proceso uniforme que está representado por una función lineal; la magnitud b, obtenida como valor de la función para $x = 0$, denota el segmento que se corta en el eje de ordenadas *).

Conforme a lo expresado en el § 50, cuando $k > 0$ la función lineal crece monótonamente, cuando $k < 0$, decrece monótonamente. Para construir la gráfica es suficiente calcular las coordenadas de dos puntos. Determínese por la fig. 23 como influye la magnitud del coeficiente angular k sobre la posición de la recta con respecto al eje de abscisas.

§ 52. Trinomio cuadrado. Introducción

En los distintos campos de la ciencia y la técnica se trata con magnitudes variables relacionadas entre sí por una dependencia funcional de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Ejemplos 1. El camino recorrido por un cuerpo con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o uniformemente retardado se expresa por la fórmula

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t + S_0,$$

donde t es el tiempo; S, es el camino recorrido; S_0, el camino inicial; v_0 la velocidad inicial; a, la aceleración.

2. La dependencia entre el diámetro del círculo d y su superficie F se expresa por la fórmula

$$F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

3. La resistencia ejercida por el medio, por ejemplo, por el

*) Corrientemente b se llama ordenada en el origen. (*Nota del T.*)

aire, al movimiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado de la velocidad: $f = kv^2$. Esta correlación se produce, por ejemplo, durante el movimiento de un avión en el aire. En los ejemplos 2) y 3) tenemos un caso particular de la dependencia funcional $y = ax^2 + bx + c$, cuando $b = c = 0$

● DEFINICION. La función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se llama *función de segundo grado o trinomio cuadrado*. Los tres ejemplos antes expuestos de dependencias funcionales han sido ejemplos de funciones de segundo grado *). El estudio de las propiedades del trinomio cuadrado lo comenzamos con casos particulares y la construcción de las correspondientes curvas.

§ 53. Representación gráfica de la función $y = ax^2$

Por la ecuación se encuentran fácilmente las siguientes propiedades:

1) La función está definida para cualquier valor real de x.

2) La función ax^2 es par, puesto que $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2$. Por lo tanto, la curva es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

3) La función se anula si $x = 0$, es decir, la curva pasa por el origen de coordenadas.

4) Para $a > 0$ la función crece en el semieje positivo y decrece en el semieje negativo.

En efecto, supongamos que x_1 y x_2 son dos valores positivos del argumento ($x_2 > x_1$), en tal caso $y_2 > y_1$, ya que la diferencia $a(x_2^2 - x_1^2) > 0$, como producto de dos números positivos.

En el semieje negativo a un número negativo mayor corresponde un cuadrado menor de este número. (Por ejemplo, $-2 > -3$, pero $(-2)^2 < (-3)^2$.) Por lo tanto, $a(x_2^2 - x_1^2) < 0$ para $a > 0$.

Basándonos en los resultados del análisis, se puede construir la gráfica de la función.

● DEFINICION. La gráfica de la función $y = ax^2$ se llama *parábola*. En la fig. 24 se muestran tres parábolas distintas:

$$1)\ y = x^2,\quad 2)\ y = 2x^2,\quad 3)\ y = \frac{1}{2}x^2.$$

Aclaremos qué función cumple la magnitud numérica del coeficiente a para x^2. Para ello igualemos las ordenadas de

*) Se conocen también como trinomios de segundo grado (*Nota del T.*)

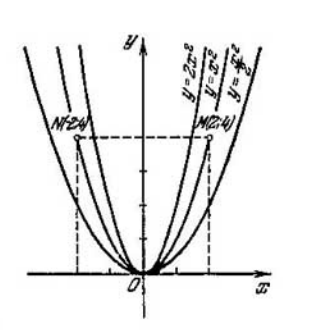


Fig. 24.

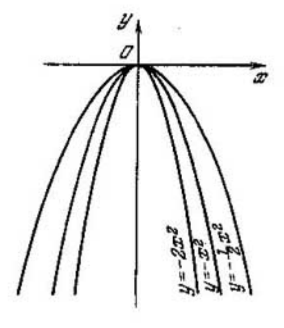


Fig. 25.

dos parábolas $y = x^2$ y $y = 2x^2$, correspondientes a una misma abscisa, igual a x_0, es decir, las magnitudes $y_1 = x_0^2$, $y_2 = 2x_0^2$. Obtenemos que $\frac{y_2}{y_1} = 2$ ó $y_2 = 2y_1$.

De este modo, *todas las ordenadas de la parábola* $y = 2x^2$ *son dos veces mayores que las ordenadas de la parábola* $y = x^2$, *tomadas para iguales abscisas*; esto permite construir fácilmente la gráfica de $y = 2x^2$ conforme a la gráfica obtenida de $y = x^2$. Para ello, todas las ordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2$ hay que extenderlas en el sentido positivo del eje Oy, aumentándolas al doble. Análogamente, la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ se puede obtener de la gráfica de $y = x^2$ reduciendo todas las ordenadas dos veces, lo que está representado en la fig. 24. Para obtener la gráfica de la función $y = -ax^2$, teniendo la gráfica de la función $y = ax^2$, se representa esta última simétricamente con respecto al eje Ox, puesto que para iguales valores de x las ordenadas de $y_1 = ax^2$ e $y_2 = -ax^2$ se diferencian sólo por los signos.

En la fig. 25 se muestran las parábolas $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ como imágenes especulares, con respecto al eje Ox, de las parábolas: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

E j e m p l o. Hallar $\sqrt{10}$ utilizando la gráfica de $y = x^2$. Trazamos por el eje Oy hacia arriba del origen de ordenadas el segmento OB, igual a 10 unidades de la escala, y por el punto B trazamos una recta paralela al eje Ox. Supongamos

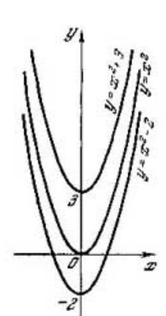


Fig. 26.

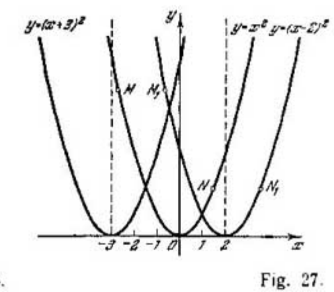


Fig. 27.

que M es un punto de intersección de esta recta con la parábola en el primer cuadrante. La abscisa de este punto nos da precisamente el valor aproximado de $\sqrt{10}$.

§ 54. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + n$

Si transportamos la parábola $y = ax^2$ paralelamente a sí misma en n unidades hacia arriba en dirección positiva del eje Oy (para $n > 0$), la nueva ecuación de la curva será $y = ax^2 + n$, ya que por esta traslación todas las ordenadas aumentaron en una misma magnitud, y las abscisas quedaron como antes. Cuando $n < 0$ se traslada paralelamente en dirección negativa del eje Oy, en otras palabras, la curva se hace descender n unidades. En la fig. 26 se muestran las transformaciones correspondientes para $n = 3$ y $n = -2$.

§ 55. Representación gráfica de la función $y = (x - m)^2$

Desplazamos la parábola $y = x^2$ a lo largo del eje Ox, en dirección positiva, a una magnitud igual a dos unidades de escala (fig. 27). En tal caso el punto M se traslada al punto M_1: el punto N, al punto N_1 y lo mismo ocurrirá con cualquier otro punto de la gráfica. Con esta transformación las abscisas de los puntos M_1 y N_1 aumentan dos unidades en comparación con las abscisas de los puntos M y N, y las ordenadas permanecen invariables. De aquí se deduce que la ecuación de la parábola en la nueva posición con respecto al sistema de coordenadas debe ser $y = (x - 2)^2$. De manera semejante, al desplazarse la parábola a tres unidades de

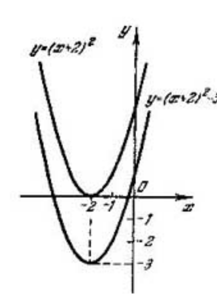


Fig. 28.

escala en dirección negativa del eje Ox, la nueva ecuación de la parábola será $y = (x + 3)^2$, puesto que con tal movimiento la abscisa de cada punto disminuyó tres unidades, en tanto que las ordenadas no variaron. Está claro que tenemos la siguiente condición general. La gráfica de la función $y = (x - m)^2$ puede ser obtenida con un desplazamiento de la parábola $y = x^2$ a $|m|$ unidades de escala a derecha a lo largo del eje Ox, si $m > 0$, y a izquierda, si $m < 0$.

Observación. La gráfica de la función $y = a(x - m)^2$ puede ser obtenida de un modo análogo de la gráfica de la función $y = ax^2$.

§ 56. Representación gráfica de la función $y = (x-m)^2+n$

El paso de la parábola $y = x^2$ a la gráfica de la función $y = (x - m)^2 + n$ se puede realizar en dos etapas:
1) desplazando la parábola $y = x^2$ a la magnitud m a lo largo del eje Ox, por lo que obtenemos la gráfica de la función

$y = (x - m)^2$;

2) trasladando la curva $y = (x - m)^2$, paralelamente a sí misma, a la magnitud n (es decir, en $|n|$ hacia arriba, si $n > 0$, y hacia abajo, si $n < 0$).
En la fig. 28 se muestra el trazado de la curva $y = (x + 2)^2 - 3$.
1) Desplazamos la parábola $y = x^2$ a dos unidades a lo largo del eje Ox en dirección negativa; obtenemos la gráfica de la función .

$y = (x + 2)^2$.

2) Trasladamos paralelamente a tres unidades hacia abajo la parábola $y = (x + 2)^2$, lo que nos conduce a la gráfica de la función inicial

$$y = (x + 2)^2 - 3.$$

En general, la gráfica de la función $y = (x - m)^2 + n$ es una parábola, cuyo eje de simetría (denominado también *eje de la parábola*) es paralelo al eje de ordenadas, y el *vértice* se encuentra en el punto $C\ (m;\ n)$.

§ 57. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$

Demostremos que el trinomio cuadrado siempre puede transformarse en la forma $y = a\,(x - m)^2 + n$.
Tenemos que:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Si designamos $-\frac{b}{2a}$ por m; $\frac{4ac-b^2}{4a}$ por n, el trinomio toma finalmente la forma $y = a\,(x - m)^2 + n$.
Esta transformación permite construir inmediatamente la gráfica de la función según la gráfica de $y = ax^2$ obtenida.

E j e m p l o. $y = x^2 + 4x - 1$.
Transformemos el segundo miembro:

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3,$$

$$y = (x + 2)^2 - 3$$ (véase la fig. 28).

§ 58. Resumen general sobre el trinomio cuadrado

Hemos estudiado el trinomio cuadrado (función de segundo grado) $y = ax^2 + bx + c$, comenzando de los casos particulares:

1) $y = ax^2\ (b = c = 0,\ a \neq 0)$;
2) $y = ax^2 + c\ (b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$;
3) $y = ax^2 + bx\ (c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$;

y, por último, su forma entera

4) $y = ax^2 + bx + c$, cuando a, b, y c son distintos de cero.

En los cuatro casos considerados las gráficas de las

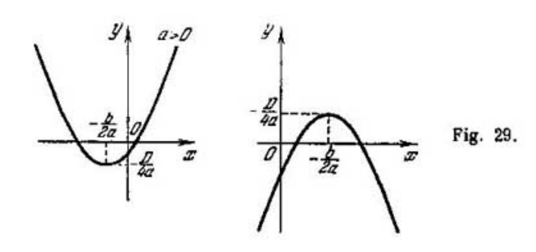


Fig. 29.

funciones representan una misma curva, la parábola, pero dispuesta de distinta manera con respecto a los ejes coordenados. Por la gráfica podemos seguir fácilmente la marcha de la variación de la función y establecer las propiedades de la misma. Las propiedades de la función $y = ax^2$ las establecimos analíticamente, es decir, por la ecuación, antes de construir la curva.

No nos vamos a detener a establecer las propiedades analíticas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Sin embargo, podemos establecer algunas de estas propiedades por la gráfica (fig. 29). Con esto se justificará la conveniencia de reducir el trinomio cuadrado $y = ax^2 + bx + c$ a la forma

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

1) La función $y = ax^2 + bx + c$ está definida en todo el eje de abscisas, es decir, para cualquier valor real del argumento.

2) Para $a > 0$ en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ el trinomio decrece monótonamente, en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, crece monótonamente.

3) En el punto $x = -\frac{b}{2a}$ el trinomio tiene el menor valor $(a > 0)$, igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

4) Para $a < 0$ el trinomio crece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y decrece en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, alcanzando en

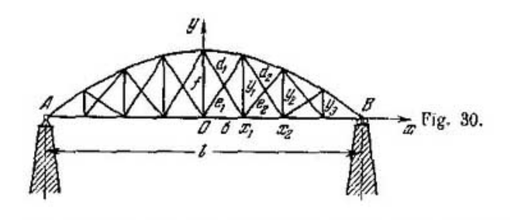


Fig. 30.

el punto $x = -\frac{b}{2a}$ su valor máximo, que es igual a $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

§ 59. Problemas de trinomio cuadrado

▶ Problema 1. De todos los rectángulos de perímetro dado $p = 24$ (m) hallar aquel cuya superficie sea la mayor. Supongamos que x es la base del rectángulo, en tal caso la altura es igual a $(12 - x)$ y la superficie

$$y = x(12 - x) = 12x - x^2 = 36 - (x - 6)^2.$$

Está claro que, para $x = 6$ tendremos el mayor valor de la superficie $y = 36$, y el rectángulo es un cuadrado.

▶ Problema 2. En la fig. 30 se ha representado una viga parabólica de luz $l = 40$ m y flecha $f = 5$ m. La viga está dividida en ocho partes (paneles) iguales en anchura. Calcular las longitudes de los montantes y_1, y_2 e y_3.
Formemos la ecuación de la parábola AB: ésta debe tener la forma $y = ax^2 + c$, donde $a < 0$. El término independiente $c = f = 5$. Las coordenadas del punto B son: $x_B = \frac{l}{2} = 20$, $y_B = 0$. Conociendo las coordenadas del punto B se puede determinar el coeficiente a: en efecto, de $0 = a \cdot 20^2 + 5$ obtenemos $a = -\frac{1}{80}$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola AB toma la forma.

$$y = -\frac{1}{80}x^2 + 5.$$

La longitud del montante y_1 es igual a la ordenada de la parábola, cuando la abscisa $x_1 = \frac{20}{4} = 5$, es decir,

$$y_1 = -\frac{1}{80} \cdot 5^2 + 5, \quad y_1 \approx 4,7.$$

Análogamente obtenemos

$y_2 = y(10) = -\frac{1}{80}\cdot 10^2 + 5, \quad y_2 = 3,75;$

$y_3 = y(15) = -\frac{1}{80}\cdot 15^2 + 5, \quad y_3 \approx 2,2.$

Problema 3. Hallar el valor mínimo de la función $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. El trinomio cuadrado, que se encuentra bajo el signo radical, alcanza el valor mínimo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$; en este caso $a = 1$, $b = 1$, $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, y el menor valor del trinomio $x^2 + x + 1$ es igual a

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}.$

Al menor valor de la expresión subradical corresponde el menor valor de la raíz aritmética.

Por lo tanto, $y_{mín} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$

§ 60. Representación gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$. Construcción de gráficas de funciones más complejas

Construyamos la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, que frecuentemente encontramos en la práctica.

Establezcamos al principio algunas propiedades de esta función.

1) La función está definida para todos los valores reales de $x \neq 0$. Si $x = 0$ la función es indeterminada (¡no se puede dividir por cero!). De este modo, la región de definición se compone de dos intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

2) La función es impar, puesto que $f(-x) = -f(x)$. Por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas. Por eso, es suficiente considerar esta función sólo para $x > 0$.

3) Si $x > 0$ la función *decrece* con el crecimiento de x. En efecto, supongamos que $x_2 > x_1 > 0$, en tal caso $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$, es decir, $y_2 < y_1$.

Formemos la tabla de valores de la función

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...
y	...	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

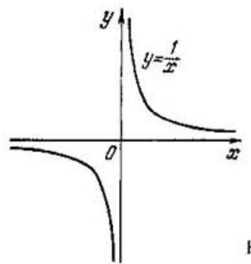


Fig. 31

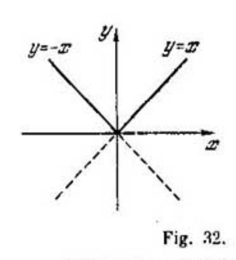


Fig. 32.

En la fig. 31 se muestra la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$. Esta curva se denomina *hipérbola equilátera.* Está compuesta de dos ramas situadas en los cuadrantes primero y tercero. La misma forma tiene también la gráfica de la función $y = \frac{a}{x}$ para $a > 0$; si $a < 0$, obtenemos una hipérbola cuyas ramas se encuentran en los cuadrantes segundo y cuarto. En los párrafos anteriores se construyeron las gráficas de las funciones elementales, es decir, de la función lineal y del trinomio cuadrado (función de segundo grado). Veamos ahora con algunos ejemplos, como se pueden construir las gráficas de otras funciones, más complejas por su modo de planteo.

E j e m p l o 1. Construir la gráfica de la función: $y = |x|$.
1) Si $x \geqslant 0$, tendremos que $|x| = x$ y nuestra función $y = x$, es decir, la curva buscada coincide con la bisectriz del primer ángulo coordenado.
2) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ e $y = -x$.. Para valores negativos del argumento x, la gráfica de dicha función es una recta $y = -x$, es decir, la bisectriz del segundo ángulo coordenado.
De este modo, la gráfica buscada es una línea quebrada, compuesta de dos semirrectas (fig. 32).
Comparando las dos gráficas : $y = x$ e $y = |x|$ deducimos que la segunda se obtiene de la primera, como imagen especular con respecto al eje Ox, de aquella parte de la primera gráfica que se encuentra bajo el eje de abscisas. Esta situación deriva de la definición de magnitud absoluta.

E j e m p l o 2. $y = |x - 2|$.
Al principio construimos la gráfica de la función $y = x - 2$ (fig. 33), que corta el eje de abscisas en el punto $x = 2$. La

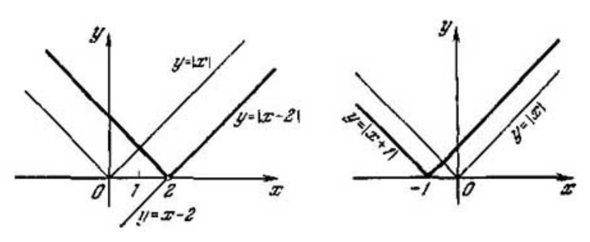


Fig. 33. Fig. 34.

parte de la gráfica que se encuentra bajo el eje de abscisas lo representamos especularmente con respecto al eje Ox; esto será precisamente la gráfica $y = |x - 2|$.

Se nota fácilmente que si se desplaza la gráfica $y = |x|$ a dos unidades en dirección positiva a lo largo del eje Ox, obtendremos una nueva gráfica $y = |x - 2|$. De un modo semejante la gráfica $y = |x + 1|$ se obtiene de la gráfica $y = |x|$ trasladándola paralelamente en dirección negativa del eje Ox a una unidad de escala (fig. 34).

Ejemplo 3. $y = \frac{x}{|x|}$.

1) Para todos los valores de $x < 0$ tendremos $|x| = -x$ y por eso $y = \frac{x}{-x} = -1$.

2) Para todos los valores de $x > 0$ se tendrá $y = \frac{x}{x} = 1$.

De este modo

$$y = \begin{cases} 1 \text{ para } x > 0, \\ -1 \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ la función dada es indeterminada, puesto que la expresión $\frac{0}{0}$ se considera indeterminada. En la fig. 35 se representa la gráfica de la función.

Ejemplo 4. $y = x \cdot |x|$.

Es evidente que

$$y = \begin{cases} -x^2 \text{ para } x \leqslant 0, \\ x^2 \text{ para } x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es una combinación de la mitad izquierda de la parábola $y = -x^2$ con la mitad derecha de

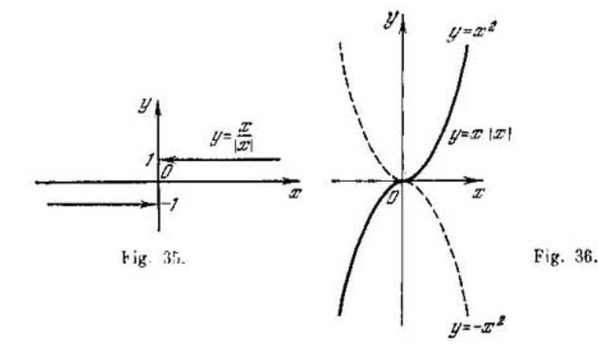


Fig. 35.

Fig. 36.

la parábola $y = x^2$ (fig. 36). Por la mitad izquierda de la parábola $y = -x^2$ sobreentendemos su parte, que corresponde a las abscisas negativas. Análogamente, la mitad derecha de la parábola $y = x^2$ es la parte que corresponde a las abscisas positivas.

▲ **Ejercicios**

1. Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Hallar $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Hallar la magnitud de la fracción $\frac{f(2)}{\varphi(2)}$ y del producto $f(1)\varphi(3)$, si $f(x)=2x+1$, $\varphi(x)=x^2+4$.

3. Hallar la región de definición de cada una de las siguientes funciones:

1) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\sqrt{2x+1}$; 3) $y=\sqrt{-x}$; 4) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$;

5) $y=\sqrt{x^2-4}$; 6) $y=\frac{1}{2x-3}$; 7) $y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}$.

4. Indicar cuáles de las funciones dadas a continuación son pares; cuáles, impares, y cuáles, ni unas, ni otras:

1) $y=x^4+1$; 2) $y=x^2+x$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=\frac{x}{x^2-4}$;

5) $y=\frac{x-3}{x+1}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 7) $y=\frac{x-x^3}{1+x^2}$.

5. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}$; 3) $y=\frac{2x+1}{x+2}$; 4) $y^2=x^3$.

6. Transportar la parábola $y=x^2$ paralelamente a sí misma a: 1) una unidad hacia arriba; 2) dos unidades hacia abajo; 3) cinco unidades hacia arriba. Para cada caso escribir la nueva ecuación de la parábola.

7. ¿Cómo se dispone el vértice de la parábola $y=x^2+q$ sobre el eje de ordenadas, si: 1) $q>0$; 2) $q<0$, 3) $q=0$?

8. Desplazar la parábola $y=x^2$ a lo largo del eje de abscisas a: 1) 4 unidades hacia la derecha; 2) 3 unidades hacia la izquierda. Para cada caso escribir la nueva ecuación de la parábola.

9. Indicar con qué desplazamiento de la parábola $y=x^2$ se obtiene cada una de las curvas:
1) $y=(x-2)^2+1$; 2) $y=(x+1)^2-4$; 3) $y=(x-3)^2-4$;
4) $y=(x+4)^2+1$.

10. Trasladar la parábola $y=x^2$ paralelamente a sí misma a:
1) 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba;
2) 1 unidad a la izquierda y 3 unidades hacia arriba;
3) 5 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo;
4) 1.5 unidad a la izquierda y 2,5 unidades hacia abajo.
Escribir para cada uno de los cuatro casos mencionados la nueva ecuación de la parábola.

11. ¿Cómo hay que trasladar la parábola $y=x^2$ con respecto a los ejes coordenados para que la nueva ecuación de la parábola sea:

1) $y=x^2-8x+7$; 2) $y=x^2+4x+3$; 3) $y=x^2-x+2\frac{1}{4}$?

¿Cuáles serán las nuevas coordenadas de los vértices de la parábola en cada caso individual?

12. ¿Cuál es la disposición mutua de cada uno de los siguientes pares de parábolas:
1) $y=3x^2$ e $y=-3x^2$;
2) $y=(x-1)^2$ e $y=-(x-1)^2$;
3) $y=(x+2)^2+3$ e $y=-(x+2)^2+3$?

13. ¿A qué debe ser igual el coeficiente a, si se sabe que el valor de la función $y=ax^2$, para $x=1$, es igual a 2?

14. ¿A qué debe ser igual el coeficiente a, si la parábola $y=ax^2$ debe pasar por el punto $(2; -4)$?

15. ¿Qué valores deben adquirir los coeficientes a y c en la fórmula $y=ax^2+c$, que expresa una función de segundo grado, para que la gráfica de la función pase por los puntos
$M(-1; -3)$ y $P(3; 0)$?

16. ¿Para qué valor del argumento x la función $y=x^2-7x-10$ tiene el menor valor?

17. ¿En qué punto, es decir, para que valor del argumento x la función $y=-x^2+8x+7$ alcanza su mayor valor?

CAPITULO VII

ECUACIONES CUADRATICAS

§ 61. Relación (dependencia) entre el trinomio cuadrado y la ecuación cuadrática

En el análisis gráfico del trinomio cuadrado dejamos de tratar a sabiendas un problema importante, es decir: ¿ para qué valores del argumento x el trinomio se anula, y si existen, en general, tales valores del argumento?

Conforme a la gráfica de la función, en cada caso concreto podemos responder a la pregunta planteada. Por ejemplo, la función $y = 2x^2 - 5x - 3$ se anula dos veces: para $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$, lo que se aprecia de la gráfica (fig. 37). Sin embargo, en una serie de casos esta clase de solución gráfica del problema hay que darla por insuficiente, puesto que, en primer lugar, la construcción de la gráfica requiere bastante trabajo y tiempo; en segundo término, las raíces del trinomio se pueden hallar por la gráfica sólo aproximadamente, por eso, hay que hallar los métodos analíticos de resolución del problema planteado lo que naturalmente nos conduce a resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

§ 62. Nociones fundamentales y definiciones

● DEFINICIÓN. La ecuación cuyo primer miembro es un polinomio de segundo grado, con respecto a la incógnita x, y el segundo miembro es igual a cero, se denomina *cuadrática*. La forma general de la ecuación cuadrática (o ecuación de segundo grado) es

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Los números a, b y c se denominan *coeficientes* de la ecuación cuadrática; de ellos, a es el primer coeficiente, o coeficiente del término principal; b, el segundo coeficiente, o coeficiente de la incógnita de primer grado; c, el término independiente. El número x_0, que hace igual a cero el trinomio cuadrado

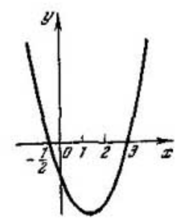


Fig. 37.

$ax^2 + bx + c$, se denomina *raíz* del trinomio, así como raíz de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Por ejemplo, las raíces del trinomio $y = 2x^2 - 5x - 3$ son iguales a $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$, puesto que

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$$

e

$$y(3) = 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 - 3 = 0.$$

De otro modo decimos que la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x - 3 = 0$ tiene dos raíces: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

§ 63. Ecuaciones cuadráticas incompletas

1. Tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas. Si en la ecuación cuadrática de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ uno de los dos coeficientes, b ó c, es igual a cero, o ambos a la vez son iguales a cero, la ecuación cuadrática se denomina *incompleta*. Son posibles tres formas de ecuaciones cuadráticas incompletas:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$;

2) $ax^2 + c = 0$, $(b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$;

3) $ax^2 = 0$ $(a \neq 0,\ b = c = 0)$.

2. Resolución de las ecuaciones cuadráticas incompletas. 1) La ecuación $ax^2 + bx = 0$ se resuelve descomponiendo el primer miembro en factores: $x(ax + b) = 0$. El producto se anula cuando siquiera uno de los factores es igual a cero; por eso o bien $x = 0$, o bien $ax + b = 0$, de donde $x = -\frac{b}{a}$. De este modo, la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo. $4x^2 - 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

2) La ecuación $ax^2 + c = 0$, después de dividir los términos por a y pasar el término independiente al segundo miembro, la reducimos a la forma $x^2 = -\frac{c}{a}$, $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Si los coeficientes a y c tienen signos contrarios, tendremos que $\frac{c}{a} < 0$, y por eso la incógnita x tiene dos valores reales de signos contrarios:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ejemplos. 1) $4x^2 - 9 = 0$, $x_1 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. 2) $3x^2 + 5 = 0$, $x^2 = -\frac{5}{3}$. La ecuación dada no tiene raíces, puesto que no existe tal número real de x, cuyo cuadrado es igual al número negativo $-\frac{5}{3}$. En tales casos se dice que las raíces son imaginarias (sobre los números imaginarios véase el cap. XV).

3) $ax^2 = 0$. Puesto que $a \neq 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$. Se dice que el número 0 es raíz doble de la ecuación $ax^2 = 0$, es decir, $x_1 = x_2 = 0$.

§ 64. Reducción de la ecuación cuadrática completa a la forma $(x + m)^2 = n$ $(n \geqslant 0)$

La ecuación $(x + m)^2 = n$ se puede resolver de manera semejante a la resolución de la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + c = 0$. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, obtenemos $x + m = \pm\sqrt{n}$, de donde

$$x_1 = -m - \sqrt{n}, \quad x_2 = -m + \sqrt{n}.$$

Ejemplo 1. $(x + 3)^2 = 25$, $x + 3 = \pm 5$, $x_1 = -8$, $x_2 = 2$.

Comprobación. $(-8 + 3)^2 = 25$, $(2 + 3)^2 = 25$. Ambas raíces satisfacen la ecuación. Si en dicho ejemplo se abren los paréntesis y se pasan todos los términos al primer miembro, obtendremos la ecuación cuadrática completa $x^2 - 6x - 16 = 0$. Por ahora no conocemos los métodos de resolución de tal ecuación. Pero, si logramos reducirla a la forma $(x + m)^2 = n$, con ello habremos hallado el modo de resolución.

E j e m p l o 2. $x^2 - 8x - 65 = 0$.
Extraemos del primer miembro el cuadrado perfecto de la diferencia:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 - 65 = 0.$$

$$(x - 4)^2 = 81;\ x - 4 = \pm 9;\ x_1 = -5;\ x_2 = 13.$$

§ 65. Deducción de la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática reducida

La ecuación cuadrática, cuyo primer coeficiente es igual a 1, es decir, la ecuación de la forma $x^2 + px + q = 0$, se llama *reducida*
Transformemos el primer miembro de la ecuación cuadrática reducida

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

En el primer miembro de esta ecuación se introdujeron como sumandos dos números contrarios $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ y $-\left(\frac{p}{2}\right)^2$, lo que, desde luego, no varía la magnitud del primer miembro. Después de pasar los últimos dos sumandos al segundo miembro, tendremos

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

o bien

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Extraemos la raíz cudrada de ambos miembros, considerando que

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0;\quad \text{en tal caso}\quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

de donde

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Esta es precisamente la fórmula por la cual se calculan las raíces de la ecuación cuadrática reducida. Verbalmente se puede expresar así:
Las raíces de la ecuación cuadrática reducida son iguales a la mitad del segundo coeficiente, con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad menos el término independiente.

Ahora podemos hallar inmediatamente las raíces de cualquier ecuación cuadrática reducida.

Ejemplo. Resolver la ecuación $x^2 - 3x - 28 = 0$. Aquí $p = -3$, $q = -28$. Por eso

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (-28)},$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 7.$$

§ 66. Fórmula general de las raíces de la ecuación cuadrática

Si se necesita hallar las raíces de la ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado) de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, después de dividir todos los términos por a ($a \neq 0$) ella se convierte en reducida:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

En tal caso

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

o bien

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Las raíces de la ecuación cuadrática de la forma general son iguales a una fracción cuyo denominador es el doble del primer coeficiente y el numerador es igual al segundo coeficiente, con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada del cuadrado de este coeficiente menos el cuádruplo del producto del primer coeficiente por el término independiente.

Ejemplo 1. $4x^2 - 5x - 6 = 0$ ($a = 4$, $b = -5$, $c = -6$);

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-6)4}}{8},$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{8}, \quad x_1 = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = 2,$$

Si el segundo coeficiente $b = 2m$, la fórmula de las raíces puede ser simplificada; en este caso, tendremos:

$$x_{1,2} = \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2-4ac}}{2a} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{m^2-ac}}{2a}$$

o bien

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2-ac}}{a}.$$

Ejemplo 2. $5x^2-8x-4=0.$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4\cdot 5}}{5},$$

$$x_1 = -\frac{2}{5}, \quad x_2 = 2.$$

§ 67. Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

Entre las raíces de la ecuación cuadrática y sus coeficientes existe una dependencia expresada por el siguiente teorema.

Teorema. *La suma de las raíces de la ecuación cuadrática reducida es igual al segundo coeficiente con signo contrario, y el producto de las raíces es igual al término independiente.*

■ DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática reducida tenemos

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Multiplicando miembro a miembro las mismas igualdades, obtenemos

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

(el producto de la diferencia de dos números por su suma),

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

lo que precisamente se quería demostrar.

El t e o r e m a r e c í p r o c o también es válido *Si la suma de dos números desconocidos es igual a p y su producto es igual a q, los números buscados son las raíces de la ecuación cuadrática*

$$x^2 - px + q = 0 \qquad (1)$$

■ DEMOSTRACIÓN Si m y n son números desconocidos, por la condición del teorema tendremos:

$$\left.\begin{aligned} m+n&=p,\\ m\cdot n&=q. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Basándonos en las igualdades (2) la ecuación (1) toma la forma

$$x^2 - (m + n)\,x + mn = 0. \qquad (3)$$

Sustituyendo en la ecuación (3) x por m, tendremos

$$m^2 - (m + n)\,m + mn = 0$$

o bien

$$0 = 0.$$

De un modo semejante comprobamos que el número n también es una raíz de la ecuación (3), con lo que se demuestra la validez del teorema recíproco.

C o r o l a r i o. Para la ecuación cuadrática de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, después de reducirla a la forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, tendremos

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Si están dadas las raíces de la ecuación cuadrática, podemos formar la misma ecuación basándonos en la demostración del teorema recíproco.

E j e m p l o 1. Formar la ecuación cuadrática, cuyas raíces son: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Sumamos y multiplicamos las raíces: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1\cdot x_2 = -15$.
La ecuacion buscada es: $x^2 - 2x - 15 = 0$

E j e m p l o 2. $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.
Hallamos que: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1\cdot x_2 = 7$.
La ecuación buscada es: $x^2 - 6x + 7 = 0$.

§ 68. Descomposición del trinomio cuadrado en factores

Utilizando las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, todo trinomio de raíces reales se puede descomponer en factores:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\,[x^2-(x_1+x_2)\,x+x_1x_2]=a\,[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)]=$$
$$=a\,[x\,(x-x_1)-x_2\,(x-x_1)]=a\,(x-x_1)\,(x-x_2).$$

Ejemplo. $2x^2+5x-3=2\,(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Las raíces del trinomio son: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

§ 69. Estudio de las raíces de la ecuación cuadrática

Al resolver las ecuaciones cuadráticas de coeficientes numéricos en ciertos casos se obtienen dos raíces reales, diferentes entre sí; en otros casos, dos raíces reales iguales, y en los demás, dos raíces imaginarias.

Naturalmente surgen las siguientes preguntas: 1) ¿de qué depende el carácter de las raíces de la ecuación cuadrática? 2) ¿no se podrá decir previamente, sin haber resuelto la ecuación, si ésta tendrá raíces reales, y si las tiene, serán positivas o negativas?

Las respuestas a estas preguntas constituyen precisamente lo que se admite en llamar *estudio* de las raíces de la ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado).

En este análisis tiene especial importancia la expresión $D=b^2-4ac$, llamado *discriminante de la ecuación de segundo grado.*

Son posibles los siguientes tres casos.

Caso 1. $a>0$, $D>0$.

Si el discriminante es un número positivo, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y distintas, puesto que la expresión $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ representa en sí dos números contrarios, más aún, ninguno de ellos es igual a cero; por lo tanto, las fracciones

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

tienen diferentes numeradores para denominadores iguales.

Con respecto a los signos de los coeficientes b y c se pueden efectuar las cuatro suposiciones siguientes:

1) $b < 0$, $c > 0$.

Si el término independiente es positivo, ambas raíces son de signo igual, puesto que $x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$. La suma de las raíces $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, y, por eso, ambas raíces son positivas.

2) $b > 0$, $c > 0$.

Ambas raíces son negativas y de igual signo, puesto que el signo de la suma de las raíces es contrario al signo del coeficiente $\frac{b}{a} > 0$.

3) $b < 0$, $c < 0$.

Las raíces son de signo contrario, dado que el producto es negativo: $x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$. La raíz mayor en valor absoluto es positiva, ya que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

4) $b > 0$, $c < 0$.

Las raíces son de signo contrario. La raíz mayor en valor absoluto es negativa.

Caso 2. $a > 0$, $D = 0$.

Ambas raíces son reales e iguales: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, como se desprende de la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática. Si $b > 0$, ambas raíces son negativas; para $b < 0$, ambas raíces son positivas.

Caso 3. $a > 0$, $D < 0$.

La ecuación cuadrática no tiene raíces reales, puesto que la raíz cuadrada del número negativo $\sqrt{D}$ es un número imaginario. Por ahora no examinaremos este caso (véase el cap. XV).

Observación. Si $a < 0$, multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1, obtenemos una ecuación de coeficiente positivo para x^2.

Los resultados del análisis están expuestos geométricamente en las gráficas del trinomio cuadrado (fig. 38): en el caso 1 la parábola corta el eje de abscisas en dos puntos x_1 y x_2 (x_1 y x_2 son raíces del trinomio y al mismo tiempo raíces de la

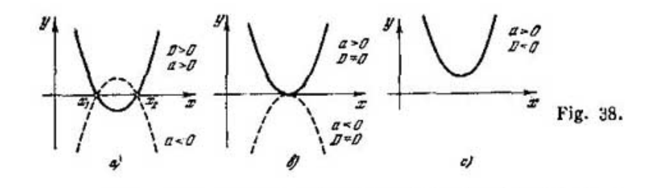


Fig. 38.

ecuación cuadrática); en el caso 2, la parábola es tangente al eje de abscisas (las dos raíces se confunden en una) y en el caso 3, la parábola no corta al eje Ox (las raíces son imaginarias).

§ 70. Resolución de problemas basados en las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

▶ Problema 1. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, formar una nueva ecuación cuadrática cuyas raíces sean inversas a las raíces de dicha ecuación.

Designemos las raíces de la nueva ecuación por α y β, en tal caso $\alpha = \frac{1}{x_1}$, $\beta = \frac{1}{x_2}$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación dada.

Hallemos la suma y el producto de las nuevas raíces:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Pero dado que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, tendremos que

$$\alpha + \beta = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Conociendo la suma y el producto de las raíces, formamos la propia ecuación $x^2 + \frac{b}{c} x + \frac{a}{c} = 0$, ó $cx^2 + bx + a = 0$.

De este modo, si se cambian de lugares los coeficientes extremos de la ecuación cuadrática, las raíces de la nueva ecuación serán raíces inversas a las primitivas.

▶ Problema 2. Dada la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$. ¿Para qué valores de m la relación de las raíces es $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}$?

Según la propiedad de las raíces de la ecuación cuadrática y por los datos del problema tenemos:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m}{2}, \\ x_1\cdot x_2=15, \\ \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Eliminando de este sistema las incógnitas x_1 y x_2 hallaremos m, es decir, obteniendo de la tercera ecuación $x_1=\frac{3}{5}x_2$ y sustituyendo en las dos primeras, tendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{5}x_2=-\dfrac{m}{2}, \\ \dfrac{3}{5}x_2^2=15, \end{cases}$$

de donde $x_2=\pm 5$, $\frac{8}{5}(\pm 5)=-\frac{m}{2}$, $m=\pm 16$.

Problema 3. Hallar la suma de los cuadrados y la suma de los cubos de las raíces de la ecuación cuadrática ax^2+ $+bx+c=0$, sin haber hallado las mismas raíces x_1 y x_2.

1) La suma de los cuadrados es $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-$ $-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

2) La suma de los cubos de las raíces se puede representar del siguiente modo:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2),$$

$$x_1^3+x_2^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{3bc}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}.$$

§ 71. Problemas de ecuaciones cuadráticas

Problema 1. Por los lados de un ángulo recto se mueven uniformemente dos cuerpos A y B en dirección al vértice del ángulo recto.

La velocidad del cuerpo A es dos veces mayor que la velocidad del cuerpo B. Después de 10 segundos la distancia entre A y B es igual a 130 m. Hallar la velocidad de cada cuerpo, si en el instante de comenzar el movimiento el cuerpo A se encontraba a la distancia de 270 m del vértice del ángulo recto, y el cuerpo B, a la distancia de 125 m (fig. 39).

Supongamos que la velocidad del cuerpo A es de $2x$ m/s, la velocidad del cuerpo B es de x m/s. En tal caso, después de

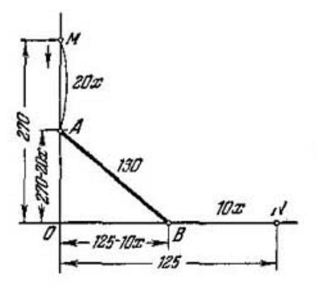


Fig. 39.

10 s la distancia del cuerpo A del vértice es igual a $(270 - 20x)$ m, y la distancia del cuerpo B del vértice es igual a $(125 - 10x)$ m.
Por los datos del problema debe ser $(270 - 20x)^2 + (125 -$

$- 10x)^2 = 130^2$.

Abriendo paréntesis, pasando todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación cuadrática

$20x^2 - 532x + 2865 = 0$.

Sus raíces son $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 19{,}1$.
De este modo, la velocidad del cuerpo B es igual a 7,5 m/s ó a 19,1 m/s; la velocidad del cuerpo A respectivamente igual a 15 m/s ó 38,2 m/s.
En el primer caso ambos cuerpos no han llegado hasta el vértice: A se encuentra a la distancia de $270 - 150 = 120$ m, B se encuentra a la distancia de $125 - 75 = 50$ m.
Puesto que $120^2 + 50^2 = 130^2$, la respuesta obtenida satisface los datos del problema.
La segunda respuesta no satisface los datos del problema, en el sentido estricto de la palabra, puesto que el camino recorrido por cada cuerpo después de 10 s será mayor que la distancia al vértice y los cuerpos no se encontrarán sobre los lados del ángulo recto, sino sobre sus prolongaciones tras el vértice. Para admitir la segunda respuesta hay que cambiar las condiciones del problema: en lugar de la frase «por los lados de un ángulo recto se mueven dos curpos» hay que decir «por rectas mutuamente perpendiculares se mueven dos cuerpos» y, en ese caso, ambas respuestas satisfacerán los datos del problema.

▶ Problema 2 (es histórico y pertenece a Euler). Dos campesinas llevaron al mercado 100 huevos en total; una de ellas tenía una cantidad mayor de huevos que la otra, no obstante ambas obtuvieron de la venta iguales sumas de dinero. Una de ellas dijo a la otra: «Si yo tuviese tus huevos ganaría 15 kreuzeres». La segunda contestó: «Y si yo tuviese los tuyos, obtendría por ellos $6\frac{2}{3}$ kreuzeres». ¿Cuántos huevos tenía cada campesina?

Supongamos que la primera campesina tenía x huevos, en tal caso, la segunda tenía $100 - x$. Si la primera hubiese tenido la misma cantidad de huevos que la segunda, es decir, $100 - x$, habría ganado 15 kreuzeres; por lo tanto, la primera vendió cada huevo a $\frac{15}{100-x}$ kreuzeres, y la segunda campesina vendió cada huevo al precio de $\frac{6\frac{2}{3}}{x} = \frac{20}{3x}$.

De este modo, la primera campesina ganó por sus x huevos $x\frac{15}{100-x}$, y la segunda $(100 - x)\frac{20}{3x}$.

Según el planteo del problema las ganancias fueron iguales. De aquí tendremos la ecuación $\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}$. Después de simplificar y racionalizar los términos obtenemos:

$$\frac{3x}{100-x} = 4\frac{(100-x)}{3x}; \quad 9x^2 = 4(100-x)^2; \quad 3x = \pm 2(100-x);$$

$x_1 = 40$; $x_2 = -200$ (no sirve).

Así, pues, la primera campesina tenía 40 huevos y la segunda 60.

▶ Problema 3. Dos obreros A y B aceptaron realizar cierto trabajo en 16 días. Después de cuatro días de trabajo conjunto A pasó a otro trabajo, debido a lo cual B terminó solo la parte de trabajo restante en un plazo de 12 días mayor que el plazo, durante el cual A solo puede realizar todo el trabajo.

¿En cuántos días cada obrero, por separado, puede realizar todo el trabajo?

Supongamos que A puede realizar todo el trabajo en x días, en tal caso, en un día laboral éste debe ejecutar $\frac{1}{x}$ parte de todo el trabajo.

Durante el trabajo conjunto A y B realizan en un día $\frac{1}{16}$

parte de todo el trabajo; por lo tanto, B cumple por día $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{x}\right)$ parte de todo el trabajo. Por otro lado, B debe realizar por día $\frac{3}{4}:(x+12)=\frac{3}{4(x+12)}$ parte del trabajo total, puesto que en 4 días de trabajo conjunto realizaron $\frac{1}{4}$ de todo el trabajo; por lo tanto, quedó a cumplir por B $\frac{3}{4}$ del trabajo total en $(x+12)$ días.

De aquí, tendremos la ecuación $\frac{1}{16}-\frac{1}{x}=\frac{3}{4(x+12)}$. Los dos miembros de la ecuación expresan una misma magnitud, es decir, la norma diaria del obrero B.
Resolviendo esta ecuación hallamos $x=24$ (la segunda raíz $x=-8$ no satisface las condiciones del problema).
El obrero B realiza por día $\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$ parte de todo el trabajo; por lo tanto, todo el trabajo lo cumple en 48 días.

§ 72. Ecuación bicuadrada

● DEFINICION. La ecuación de cuarto grado que contiene sólo potencias pares de la incógnita se llama *bicuadrada*. La forma general de tal ecuación es

$$ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0).$$

La resolución de esta ecuación se reduce a la resolución de dos ecuaciones cuadráticas, lo que está explícito en la misma denominación.
Cabe señalar que si la ecuación bicuadrada tiene una raíz x_0, tiene también la raíz $-x_0$, es decir, las raíces de la ecuación bicuadrada son de dos en dos contrarias.
En realidad, si x_0 es una raíz, sustituyendo en la ecuación x por x_0 nos da una igualdad exacta

$$ax_0^4+bx_0^2+c=0, \quad (1)$$

pero, en tal caso, también es correcta otra igualdad:

$$a(-x_0)^4+b(-x_0)^2+c=0, \quad (2)$$

puesto que los primeros miembros de las igualdades (1) y (2) son idénticos.
Para resolver la ecuación bicuadrada introduzcamos una incógnita auxiliar z, suponiendo que $z=x^2$, $z^2=x^4$. En tal caso, la ecuación toma la forma

$$az^2+bz+c=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática con respecto a la incógnita auxiliar z, y sus raíces son

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Pero $z_1=x^2$ y $z_2=x^2$, de donde

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

De este modo, la ecuación bicuadrada tiene cuatro raíces, además, las raíces x_1 y x_2, x_3 y x_4 son de dos en dos contrarias, es decir, la suma de cada par de raíces es igual a cero, y por eso, también la suma de las cuatro raíces es igual a cero. Estas fórmulas se pueden unir en una

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Ejemplo. $2x^4-19x^2+9=0$;

$z=x^2$, $2z^2-19z+9=0$,

$z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=9$;

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_{3,4}=\pm 3$.

§ 73. Estudio de las raíces de la ecuación bicuadrada

El carácter de las raíces de la ecuación bicuadrada

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

depende de las raíces de la ecuación cuadrática auxiliar

$$az^2+bz+c=0. \qquad (2)$$

1. Supongamos que $a>0$ y el discriminante de la ecuación (2) es positivo: $D=b^2-4ac>0$. En tal caso, si $c>0$ y $b<0$, las dos raíces son positivas: $z_1>0$ y $z_2>0$, y la ecuación bicuadrada (1) tiene cuatro raíces reales, puesto que

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}.$$

2. Si $a>0$, $D>0$, $c>0$ y $b>0$, entonces $z_1<0$, $z_2<0$. Las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada son imaginarias.

3. Si $a > 0$, $D > 0$, $c < 0$ la ecuación cuadrática (2) tiene una raíz positiva y otra negativa, $z_1 < 0$ y $z_2 > 0$, por eso el par de raíces x_3 y x_4 es real, el otro par x_1 y x_2 es imaginario.

§ 74. Ecuaciones que se reducen a cuadráticas

Al resolver la ecuación bicuadrada hemos sustituido $z = x^2$, gracias a lo cual disminuimos la potencia de la ecuación dada reduciéndola a una ecuación cuadrática.

También se recurre a la sustitución cuando las ecuaciones o sistemas de tipos desconocidos se deben reducir a ecuaciones o sistemas de tipos conocidos.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. $2\sqrt[3]{x^4}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$

Si el factor x lo llevamos bajo el signo radical, tendremos que

$$2\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}-20=0.$$

Supongamos que $t=\sqrt[3]{x^2}$, $t^2=\sqrt[3]{x^4}$. En tal caso la ecuación se escribe en la forma

$$2t^2-3t-20=0.$$

Hallamos sus raíces

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{4},$$

$$t_1=4, \quad t_2=-\frac{5}{2}.$$

De donde $4=\sqrt[3]{x^2}$, $64=x^2$, $x=\pm 8$.

El segundo valor de $t=-\frac{5}{2}$ lo despreciamos, puesto que t es un número positivo, lo que se desprende de la igualdad $t=\sqrt[3]{x^2}$.

Ejemplo 2. $\frac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2.$

El segundo miembro de la ecuación puede escribirse en la forma

$$7-(1+x+x^2).$$

Supongamos que $t=1+x+x^2$, en tal caso $\frac{10}{t}=7-t$. Resolviendo esta ecuación cuadrática con respecto a t, ob-

tenemos: $t_1 = 2$; $t_2 = 5$. Volviendo a la incógnita x, obtenemos dos ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + x + 1 = 2$; 2) $x^2 + x + 1 = 5$.

Resolviéndolas hallamos: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

De este modo, las cuatro raíces de la ecuación resultaron irracionales.

Ejemplo 3. Hallar las raíces reales de la ecuación

$\sqrt{x^2+3x+6} - 3x = x^2 + 4$.

La ecuación se puede escribir en la forma

$\sqrt{x^2+3x+6} = x^2 + 3x + 6 - 2$.

Supongamos que

$t = \sqrt{x^2+3x+6}$; $t^2 = x^2 + 3x + 6$.

La ecuación inicial toma la forma

$t^2 - t - 2 = 0$.

La raíz positiva de esta ecuación es $t = 2$.
La otra raíz $t = -1$ la despreciamos, puesto que t es el valor aritmético del radical. En consecuencia

$2 = \sqrt{x^2+3x+6}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 2 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

La verificación nos muestra que ambas raíces satisfacen la ecuación.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$|9 - x^2| - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$.

Esta ecuación es equivalente a dos ecuaciones cuadráticas

$9 - x^2 - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$ y $x^2 - 9 - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0$,

con la resolución de las cuales se pueden hallar todas las raíces de la ecuación dada.

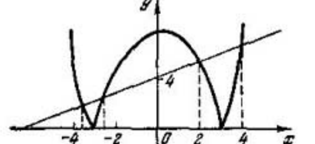


Fig. 40.

Empero, la vamos a resolver por el método gráfico. Para ello escribimos la ecuación en la forma

$$|9-x^2|=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}.$$

A continuación nuestra tarea se reduce a hallar valores tales del argumento x para los cuales las dos funciones $y=|9-x^2|$ e $y=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}$ se hacen numéricamente iguales. Es evidente que tales valores del argumento x son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas de estas dos funciones.
La gráfica de la función $y_1=|9-x^2|$ se puede obtener de la gráfica de $y=9-x^2$, representando de manera especular, con respecto al eje Ox, aquella parte que se encuentra bajo el eje de abscisas. (La parte de la gráfica de $y=9-x^2$ que se encuentra encima del eje Ox permanece invariable.)
La recta $y=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}$ interseca la primera curva en cuatro puntos, cuyas abscicas las leemos por la fig. 40.
De este modo, dicha ecuación tiene cuatro raíces:

$$x_1\approx-3{,}5;\ x_2\approx-2{,}3;\ x_3=2;\ x_4\approx 3{,}8.$$

El ejemplo concreto que analizamos es ilustrativo en el sentido de que muestra ciertas ventajas de la resolución gráfica con respecto a la analítica. Antes que nada vemos que la ecuación tiene cuatro raíces, lo que hubiera sido difícil suponer sin la gráfica. En segundo lugar, hay que realizar un cálculo bastante grande para hallar directamente estas raíces (compruébelo Ud. mismo). En verdad, con el método de resolución gráfica de la ecuación, en la mayoría de los casos hallamos solamente valores aproximados de las raíces; en ejemplos raros, especialmente elegidos, se pueden hallar también valores exactos de las raíces.

§ 75. Resolución de ecuaciones de grado superior al segundo por descomposición del primer miembro en factores

Si después de pasar todos los términos de la ecuación al primer miembro se obtiene un polinomio con respecto a la incógnita x, descomponible en factores, cada uno de los cuales no es superior al de segundo grado, la resolución de tal ecuación no presenta dificultad.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^3 - 3x^3 - x + 3 = 0$. Esta es una ecuación de tercer grado, cuyo primer miembro se descompone en factores mediante el agrupamiento:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2 (x - 3) - (x - 3) =$$
$$= (x - 3) (x^2 - 1).$$

La ecuación toma la forma

$$(x - 3) (x^2 - 1) = 0.$$

El producto se convierte en nulo cuando siquiera uno de los factores es igual a cero; por lo tanto, bien

$$x - 3 = 0, \ x = 3,$$

o bien

$$x^2 - 1 = 0, \ x = \pm 1.$$

En total tenemos tres raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Ejemplo 2. Hallar todas las raíces de la ecuación

$$x^4 + 4x + 4 = x^3 + 5x^2.$$

Dicha ecuación es una de cuarto grado. Después de pasar todos los términos al primer miembro, obtenemos:

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Descomponemos el término $-5x^2$ en dos sumandos: $-5x^2 = -x^2 - 4x^2$; en tal caso tendremos:

$$x^4 - x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Formemos dos grupos de términos, con tres términos en cada uno:

$$x^4 - x^3 - x^2 - (4x^2 - 4x - 4) = 0,$$
$$x^2 (x^2 - x - 1) - 4 (x^2 - x - 1) = 0,$$
$$(x^2 - 4) (x^2 - x - 1) = 0.$$

Igualando cada uno de los dos factores a cero y disponiendo las raíces en orden creciente, obtendremos:

$$1)\ x^2-4=0,\ x=\pm 2;\quad 2)\ x^2-x-1=0,\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$x_1=-2,\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=2.$$

Observación. Está claro que no todo primer miembro de una ecuación de cuarto grado se logra descomponer en factores con tanta facilidad; sin embargo, esta descomposición es conveniente cuando se realiza sin gran dificultad.

§ 76. Desigualdades de segundo grado

Después de haber estudiado los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas vamos a conocer cómo se resuelven las desigualdades de segundo grado. Ambas cuestiones están estrechamente relacionadas entre sí, lo que se aclarará más adelante. Veamos previamente el problema que nos conduce a una desigualdad elemental de segundo grado.

▶ P r o b l e m a. Un paracaidista efectúa un salto de retardo al encontrarse a la altura de 9000 m. Cuántos segundos puede durar la caída libre si el paracaídas debe arbrirse a una altura no menor de 500 m, en caso contraio se pone en peligro su vida. (Se desprecia la resistencia del aire.)
Conforme al problema el camino S recorrido por el paracaidista durante la caída libre debe ser menor o en el caso extremo igual a 8500 m, $S \leqslant 8500$ m, ó $\frac{gx^2}{2} \leqslant 8500$ Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por el número positivo $\frac{2}{g}$, obtenemos:

$$x^2 \leqslant \frac{17\,000}{g} = \frac{17\,000}{9{,}8},$$

$$x \leqslant \sqrt{\frac{17\,000}{9{,}8}};\quad x \leqslant 42\ (s).$$

● DEFINICIÓN Las desigualdades de tipo $ax^2+bx+c>0$ y $ax^2+bx+c<0$ se denominan *desigualdades de segundo grado*, o *cuadráticas* (en el sentido estricto de la palabra). Si a los signos $>$ ó $<$ unimos también el signo de igualdad, obtenemos una desigualdad de segundo grado no rigurosa.

La resolución del problema nos condujo a un caso particular de desigualdad no rigurosa del tipo $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, donde $a = \frac{g}{2}$; $b = 0$; $c = -8500$.

Para una acertada resolución de la desigualdad de segundo grado hay que establecer de un modo preciso y seguro cómo varía el signo del trinomio cuadrado $ax^2 + bx + c$, que es el primer miembro de la desigualdad (el segundo miembro es igual a cero).

§ 77. Estudio del signo del trinomio cuadrado

Veamos cómo varía el signo del trinomio $ax^2 + bx + c$, cuando el argumento x adquiere cualquier valor real. Para claridad y simpleza del análisis utilizaremos la fig. 38 del § 69.

Caso 1. Supongamos que $a > 0$ y $D = b^2 - 4ac > 0$. En tal caso el trinomio tiene dos raíces reales y distintas x_1 y x_2, y la gráfica del trinomio, es decir, la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje de abscisas en los puntos x_1 y x_2 (fig. 38, a). Por la gráfica establecemos que si $x < x_1$ ó $x > x_2$, entonces $y = ax^2 + bx + c > 0$. Si x adquiere valores del intervalo (x_1, x_2), entonces $y = ax^2 + bx + c < 0$.

Observación. Si $a < 0$ y $D = b^2 - 4ac > 0$, por el contrario, $ax^2 + bx + c < 0$ para $x < x_1$ y para $x > x_2$, y $ax^2 + bx + c > 0$ para valores de x del intervalo (x_1, x_2) (véase la fig. 38, a, punteado).

De este modo, *si el trinomio cuadrado tiene dos raíces reales y diferentes x_1 y x_2 ($x_2 > x_1$), para todos los valores de x fuera del intervalo (x_1, x_2) el signo del trinomio coincide con el signo del primer coeficiente a; para todo x del intervalo (x_1, x_2) el signo del trinomio es contrario al signo del coeficiente a.*

Caso 2. Supongamos que $a > 0$, $D = b^2 - 4ac = 0$. Las raíces del trinomio son iguales: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. La parábola $y = ax^2 + bx + c$ es tangente, con su vértice, al eje de abscisas en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ (fig. 38, b), para todo $x \neq -\frac{b}{2a}$ sus ordenadas son positivas, es decir, $ax^2 + bx + c > 0$.

Observación. Para $a < 0$ y $D = 0$ la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es tangente al eje de abscisas por debajo y para todo $x \neq -\frac{b}{2a}$ las ordenadas de la parábola son negativas, es decir, $ax^2 + bx + c < 0$.

De este modo, *si las raíces del trinomio son reales e iguales entre sí* $\left(x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}\right)$, *para cualquier* $x \neq \frac{b}{2a}$ *el signo del trinomio coincide con el signo del primer coeficiente* a.

Caso 3. Supongamos que $a > 0$ y $D = b^2 - 4ac < 0$. En tal caso el trinomio no tiene raíces reales y la parábola $y = ax^2 + bx + c$ no corta el eje de abscisas, ella se encuentra totalmente encima del eje Ox (fig. 38, c). Todas las ordenadas de la parábola son positivas, o $ax^2 + bx + c > 0$ para todo valor de x. Si $a < 0$ y $D < 0$ la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra completamente debajo del eje de abscisas, es decir, todas sus ordenadas son negativas.

De este modo, *si el trinomio cuadrado no tiene raíces reales, para cualquier valor real del argumento* x *el signo del trinomio conicide con el signo del coeficiente* a, es decir, si $a > 0$ el trinomio es positivo para cualquier valor de x, si $a < 0$ el trinomio es negativo para todo x.

§ 78. Resolución de desigualdades de segundo grado

Ejemplo 1. Resolver la desigualdad $2x^2 - 5x - 3 > 0$. Hallamos las raíces del trinomio: $2x^2 - 5x - 3 = 0$;

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 3.$$

Tenemos dos raíces reales y diferentes; además, el primer coeficiente $a = 2 > 0$. De acuerdo a los resultados del párrafo anterior la resolución de la desigualdad dada será todo valor de x tal que $x < -\frac{1}{2}$ ó $x > 3$. En la fig. 41 se muestra la gráfica de la función $y = 2x^2 - 5x = 3$.

Ejemplo 2. Resolver la desigualdad

$$5x^2 - 8x + 3 < 2x^2 + 4x + 5.$$

Pasamos los términos del segundo miembro al primero: $3x^2 -$

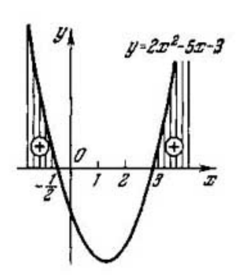


Fig. 41.

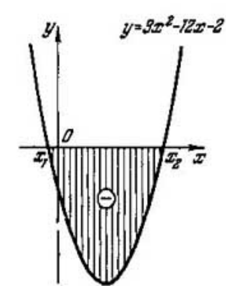


Fig. 42.

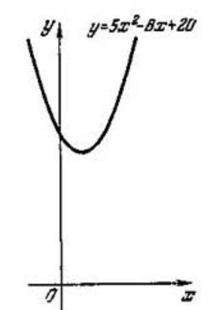


Fig. 43.

$- 12x - 2 < 0$. Hallamos las raíces del trinomio:

$3x^2 - 12x - 2 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+6}}{3},$$

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{42}}{3}; \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{42}}{3}.$$

El trinomio con el primer coeficiente positivo y raíces reales diferentes es negativo para todo x comprendido entre las raíces, es decir, $\frac{6-\sqrt{42}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{42}}{3}$. En la fig. 42 se muestra la gráfica de la función $y = 3x^2 - 12x - 2$.

E j e m p l o 3. Resolver la desigualdad

$5x^2 - 8x + 20 < 0.$

Puesto que el discriminante del trinomio $D = b^2 - 4ac = 64 - 400 < 0$, para todo x el trinomio conserva el signo

del primer coeficiente a, es decir, en nuestro caso, es positivo, por lo cual dicha desigualdad no tiene soluciones. En la fig. 43 se muestra la gráfica de la función $y = 5x^2 - 8x + 20$.

§ 79. Teoremas de equivalencia de ecuaciones

T e o r e m a 1. *Si a ambos miembros de una ecuación les sumamos un mismo número o un mismo polinomio, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.*

■ DEMOSTRACION Supongamos que tenemos la ecuación

$$f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Hay que demostrar que la nueva ecuación

$$f(x) + p(x) = \varphi(x) + p(x), \tag{2}$$

obtenida de la (1), sumando a ambos miembros el polinomio $p(x)$, es equivalente a la ecuación inicial (1).
Supongamos que el número x_0 es una raíz de la ecuación (1), en tal caso tendremos la igualdad numérica

$$f(x_0) = \varphi(x_0). \tag{3}$$

Si a ambos miembros de la igualdad (3) les sumamos el número $p(x_0)$, obtenemos una igualdad equitativa:

$$f(x_0) + p(x_0) = \varphi(x_0) + p(x_0). \tag{4}$$

La igualdad (4) denota que el número x_0 es también una raíz de la ecuación (2). Con estos razonamientos hemos demostrado que toda raíz de la ecuación (1) es también una raíz de la ecuación (2).
Demostremos el teorema recíproco: toda raíz de la ecuación (2) también es una raíz de la ecuación (1).
Supongamos que el número x_0 es una raíz de la ecuación (2).
En tal caso, la sustitución en la ecuación (2) de x por el número x_0 da lugar a la igualdad numérica:

$$f(x_0) + p(x_0) = \varphi(x_0) + p(x_0).$$

Pero de números iguales se puede restar un número igual (en este caso $p(x_0)$), obtenemos la igualdad $f(x_0) = \varphi(x_0)$, que denota que el número x_0 es una raíz de la ecuación (1), y con ello se ha demostrado la equivalencia de las ecuaciones (1) y (2).

Teorema 2. *Si ambos miembros de la ecuación*

$$f(x) = \varphi(x) \quad (1)$$

los multiplicamos por un mismo número A ($A \neq 0$), *la nueva ecuación*

$$Af(x) = A\varphi(x) \quad (2)$$

es equivalente a la ecuación inicial (1).

■ DEMOSTRACION Supongamos que el número x_1 es una raíz de la ecuación (1). En tal caso, tendremos la igualdad numérica $f(x_1) = \varphi(x_1)$. Como se sabe, los números iguales se pueden multiplicar por un mismo número distinto de cero, como resultado también obtenemos números iguales, es decir, $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, y, de este modo, el número x_1 es también una raíz de la ecuación (2).

Inversamente, supongamos que el número x_1 es una raíz de la ecuación (2). En tal caso, su sustitución en la ecuación (2) da la identidad numérica $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, donde $A \neq 0$. Pero números iguales se pueden dividir por un mismo número A; dividiendo la igualdad anterior por A obtenemos $f(x_1) = \varphi(x_1)$; esta igualdad denota que el número x_1 es también una raíz de la ecuacion (1). La justeza del teorema 2 con esto queda demostrada.

Observación. En el teorema 1 se habló de sumar a ambos miembros de la ecuación un mismo polinomio, pero no una función arbitraria. El problema está en que el polinomio está definido en todo el eje numérico, y por eso, $p(a)$ es un número real para todo valor real de a. Por ejemplo, si $p(x) = 2x^3 - 4x + 3$. tendremos que $p(1) = 2\cdot 1^3 - 4\cdot 1 + 3 = 1$, $p(a) = 2a^3 - 4a + 3$, etc.

Si no se hace esta limitación, el teorema 1 puede resultar incorrecto, como se puede apreciar del siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos la ecuación inicial $2x + 3 = x^2 - 12$. Esta ecuación tiene la raíz $x = 5$, lo que se verifica fácilmente. Sumando a ambos miembros la función fraccionaria $\frac{2}{x-5}$, obtenemos la nueva ecuación $2x + 3 + \frac{2}{x-5} = x^2 - 12 + \frac{2}{x-5}$, para la cual el número 5 ya no es una raíz, puesto que al sustituirlo en el primer y segundo miembro de la ecuación, éstos pierden el sentido definido. En efecto, en la igualdad

$$2\cdot 5 + 3 + \frac{2}{5-5} = 5^2 - 12 + \frac{2}{5-5}$$

la fracción $\frac{2}{0}$ no tiene sentido, y, por eso, todo el primer miembro, así como el segundo no tienen sentido, lo que demuestra la no equivalencia de estas dos ecuaciones.

§ 80. Raíces perdidas e impropias

En los dos teoremas del § 79 se vio cuáles son las operaciones con ecuaciones que no alteran sus equivalencias. Estudiemos ahora las operaciones con ecuaciones tales que pueden conducir a una nueva ecuación no equivalente a la ecuación inicial. En vez de razonamientos generales nos limitaremos a examinar ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Tengamos la ecuación $3x(x-1) = 5(x-1)$. Después de abrir paréntesis y pasar todos los términos al primer miembro, ésta puede ser resuelta por la fórmula de la ecuación cuadrática completa o con la descomposición del primer miembro en factores; las raíces serán: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{5}$. Si simplificamos ambos miembros por el factor $(x-1)$, se obtiene la ecuación $3x = 5$, que no es equivalente a la inicial, puesto que tiene solamente una raíz $x = \frac{5}{3}$.

Por lo tanto, la reducción de ambos miembros de la ecuación por el factor, que contiene la incógnita, puede dar lugar a la pérdida de raíces.

Ejemplo 2. La ecuación $2x - 3 = 5$ tiene una sola raíz $x = 4$. Elevemos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, obtendremos $(2x-3)^2 = 25$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos dos raíces: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$. Anotemos que la nueva ecuación $(2x-3)^2 = 25$ no es equivalente a la ecuación inicial $2x - 3 = 5$. La raíz superflua $x_1 = -1$ corresponde a la ecuación $2x - 3 = -5$, la que después de elevar ambos miembros al cuadrado nos da la misma ecuación $(2x-3)^2 = 25$.

Las raíces impropias o extrañas pueden aparecer también al multiplicar ambos miembros de la ecuación por un factor que contiene la incógnita si este factor se anula para los valores reales de x.

Ejemplo 3. Si ambos miembros de la ecuación $2x - 1 = 5$ los multiplicamos por $x + 2$, obtendremos una

nueva ecuación $(2x - 1) \times (x + 2) = 5(x + 2)$, la que después de pasar el término $5(x + 2)$ del segundo miembro al primero y descomponer en factores, nos da $(x + 2)(2x - 6) = 0$, de donde $x = -2$ ó bien $x = 3$. La raíz $x = -2$ no satisface la ecuación inicial $2x - 1 = 5$, que tiene una sola raíz $x = 3$. La raíz impropia $x = -2$ corresponde a la ecuación $x + 2 = 0$.

De aquí deducimos que: al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación (en general a una potencia par), así como al multiplicar por un factor, que contiene la incógnita y se anula para los valores reales de la incógnita, pueden aparecer raíces impropias.

§ 81. Raíces impropias de la ecuación irracional

La ecuación que contiene la incógnita bajo el signo radical se denomina *irracional*; por ejemplo,

$$\sqrt{2x+7} = 3; \quad \sqrt[3]{3x-1} = 4.$$

Vamos a demostrar con un ejemplo sencillo la posibilidad de aparición de raíces impropias al resolver una ecuación irracional. Supongamos tener la ecuación irracional $\sqrt{2x - 1} = x - 2$. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos:

$$2x - 1 = (x - 2)^2.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos las raíces:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 5.$$

Verifiquemos las raíces: $\sqrt{2 \cdot 1 - 1} \neq 1 - 2$; la raíz $x_1 = 1$ no satisface la ecuación, por lo tanto, es impropia. La segunda raíz $x_2 = 5$ satisface la ecuación. Nos preguntamos: ¿de qué modo apareció la raíz superflua $x = 1$? Esta raíz impropia corresponde a otra ecuación irracional $-\sqrt{2x - 1} = x - 2$, la que después de elevar al cuadrado nos da la misma ecuación cuadrática $2x - 1 = (x - 2)^2$. La raíz $x = 5$ es impropia con respecto a la ecuación $-\sqrt{2x - 1} = x - 2$. Por eso hay que verificar las raíces obtenidas al resolver una ecuación irracional, con la sustitución en dicha ecuación.

§ 82. Resolución de ecuaciones irracionales

Veamos en ejemplos los métodos de resolución de las ecuaciones irracionales.

Ejemplo 1. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.
La ecuación contiene solamente un radical; dejamos éste en el primer miembro, o, como se dice, *aislamos el radical*, pasando la unidad al segundo miembro: $\sqrt{x^2+5x+1}=$ $=2x-1$; elevamos ambos miembros al cuadrado y obtenemos:

$$x^2+5x+1=(2x-1)^2,$$

o bien

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1;$$

después de pasar todos los términos al primer miembro y reducir los términos semejantes, tendremos:

$$3x^2-9x=0;\ x^2-3x=0;\ x(x-3)=0;$$
$$x_1=0;\ x_2=3.$$

Verificación. $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1\neq 2\cdot 0$. Por lo tanto, la primera raíz $x=0$ no satisface la ecuación; la despreciamos (esta raíz corresponde a la ecuación irracional

$$-\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x,$$

lo que es fácil verificar). De la misma manera comprobamos que la segunda raíz $x_2=3$ satisface la ecuación dada.

Ejemplo 2. $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$.
La ecuación tiene dos radicales en un miembro; pasamos uno de ellos al segundo miembro: $\sqrt{x-9}=1+\sqrt{x-18}$; después de elevar al cuadrado tendremos $x-9=1+$ $+2\sqrt{x-18}+x-18$; dejamos el radical en el segundo miembro y pasamos los términos restantes al primer miembro:

$$8=2\sqrt{x-18};\ 4=\sqrt{x-18};\ 16=x-18;\ x=34.$$

Verificando manifestamos la utilidad de la raíz obtenida.

Ejemplo 3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=$ $=\sqrt{3x}$.
La ecuación tiene cuatro radicales; distribuimos los mismos en dos por ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x};$$

después de elevar al cuadrado tendremos:

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}+3x+2=$$
$$=2x+5+2\sqrt{(2x+5)\,3x}+3x;$$
$$2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}=2\sqrt{(2x+5)\,3x};$$

simplificamos por 2 y elevamos nuevamente al cuadrado:

$$(2x+3)(3x+2)=(2x+5)\,3x,$$
$$6x^2+13x+6=6x^2+15x;\ 2x=6;\ x=3.$$

Verificación. $\sqrt{9}+\sqrt{11}=\sqrt{11}+\sqrt{9}$; la raíz obtenida satisface la ecuación dada.

Ejemplo 4. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{b}{a}$.

La ecuación tiene la forma de una proporción. Formemos una proporción derivada: la suma de los términos de la primera relación es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda relación es a su diferencia: $\dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+a}{b-a}$ $(b\neq a)$; elevemos al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2};$$

nuevamente formemos la proporción derivada

$$\frac{2a}{2x}=\frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2};$$
$$\frac{a}{x}=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab};\quad x=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}.$$

Verificando vemos que la raíz obtenida satisface la ecuación dada. Si $b=a$, la ecuación inicial adquiere la forma

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1;$$
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x};$$
$$2\sqrt{a-x}=0;\ \sqrt{a-x}=0;\ a-x=0;\ x=a.$$

§ 83. Sistemas de ecuaciones de segundo grado y su resolución

Si una ecuación de varias incógnitas se ha reducido a la forma que no contiene términos fraccionarios, y en ella se han realizado todas las simplificaciones posibles (apertura

de paréntisis, eliminación de radicales, paso de todos los términos al primer miembro, reducción de términos semejantes), tendremos que *potencia de esta ecuación se denomina la suma de los exponentes de las incógnitas del término de la ecuación en el que esta suma es la mayor*; por ejemplo:
a) la ecuación $2xy^2 + 5x^2 + 6y - 20 = 0$ es de tercer grado, puesto que en el primer miembro la suma de los exponentes de x e y es la mayor e igual a $1 + 2 = 3$;
b) la ecuación $\frac{x^2}{x^2+y^2} + 2y^2 = 3$, después de eliminar los términos fraccionarios, adquiere la forma

$$x^2 + 2y^2 (x^2 + y^2) = 3 (x^2 + y^2),$$

o bien

$$2x^2y^2 + 2y^4 - 2x^2 - 3y^2 = 0.$$

Esta es una ecuación de cuarto grado con respecto a las incógnitas x e y.
El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se llama *sistema de sugundo grado*, si siquiera una de las ecuaciones es de segundo grado, y la otra, no superior al segundo grado.

Ejemplos.

$$1) \left\{ \begin{aligned} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0; \end{aligned} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{aligned} x^2+3y^2+xy=5. \\ 2x^2+y^2=9. \end{aligned} \right.$$

Resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas significa hallar todos los pares de valores de x e y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. Estos pares de valores de x e y se llaman *soluciones del sistema*. Por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{aligned} \right.$$

tiene dos soluciones:

$$1)\ x_1 = -1,\ y_1 = -2 \text{ y } 2)\ x_2 = 2,\ y_2 = 1,$$

puesto que cada par de valores de las incógnitas x e y, después de sustituirlos en las ecuaciones dadas conducen a identidades numéricas:

$$1)\ (-1)^2 + (-2)^2 = 5;\ 5 = 5;\ 2)\ 2^2 + 1^2 = 5;\ 5 = 5;$$
$$-1 - (-2) = 1;\ 1 = 1. \qquad 2 - 1 = 1;\ 1 = 1.$$

Examinemos la resolución de sistemas elementales.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación expresamos y por x; $y = 3x - 1$. Sustituimos este valor de y en la primera ecuación; obtendremos:

$$x^2 + (3x-1)^2 + 2(3x-1) - 9 = 0.$$

Después de abrir los paréntesis y reducir los términos semejantes, tendremos

$$x^2 - 1 = 0;$$

$$x_1 = -1; \ x_2 = 1;$$

$$y_1 = -4; \ y_2 = 2.$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2+3xy=18; \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

Descompongamos los primeros miembros de dichas ecuaciones en factores

$$\begin{cases} x(x+3y)=18; \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$$

Después de dividir la primera ecuación por la segunda, obtendremos:

$$\frac{x}{y} = 3, \text{ ó } x = 3y.$$

En tal caso la segunda ecuación nos da

$$3y^2 + 3y^2 = 6; \ y^2 = 1;$$

$$y_1 = -1; \ y_2 = 1;$$

$$x_1 = -3, \ x_2 = 3.$$

§ 84. Métodos artificiosos de resolución de sistemas de ecuaciones

En ciertos casos los sistemas de ecuación se resuelven más elegantemente que por el método de sustitución, si se recurre a procedimientos especiales.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6. \end{cases}$$

Las incógnitas x e y se pueden admitir como raíces de la ecuación cuadrática auxiliar $z^2 - 5z + 6 = 0$, de donde $z_1 = 2$; $z_2 = 3$; puesto que es indiferente qué incógnita se ha tomado por z_1 y qué incógnita por z_2, en total tendrems dos soluciones

$x_1 = 2,\ x_2 = 3;$

$y_1 = 3,\ y_2 = 2.$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y = 7; \\ \quad xy = -10. \end{cases}$$

Representemos dicho sistema en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ \quad x(-y) = 10. \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, las incógnitas x y $-y$ son raíces de la ecuación $z^2 - 7z + 10 = 0$, es decir, $z_1 = 2$, $z_2 = 5$, de donde obtendremos dos soluciones:

$x_1 = 2, \quad x_2 = 5;$

$y_1 = -5,\ y_2 = -2.$

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ \quad xy = 8. \end{cases}$$

Primer método. Multipliquemos la segunda ecuación por 2 y sumémosla con la primera; obtendremos $(x + y)^2 = 36$, de donde $x + y = \pm 6$.
De este modo, dicho sistema es equivalente al conjunto de dos sistemas:

$$1)\begin{cases} x + y = 6, \\ \quad xy = 8; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + y = -6, \\ \quad xy = 8, \end{cases}$$

cada uno de los cuales se resuelve como el sistema del ejemplo 1.
En total obtendremos cuatro soluciones:

$x_1 = -4;\ x_2 = -2;\ x_3 = 4;\ x_4 = 2;$

$y_1 = -2;\ y_2 = -4;\ y_3 = 2;\ y_4 = 4.$

Segundo método. Elevemos la segunda ecuación del sistema al cuadrado; obtendremos:

$$x^2 + y^2 = 20,$$
$$x^2y^2 = 64.$$

Si ponemos $x^2 = u$; $y^2 = v$, tendremos:

$$\begin{cases} u+v=20; \\ uv=64. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema igual que el ejemplo 1, hallamos:

$u_1 = 16$, de donde $x = \pm 4$;
$v_1 = 4$, de donde $y = \pm 2$

o bien

$u_2 = 4$, de donde $x = \pm 2$,
$v_2 = 16$, de donde $y = \pm 4$.

Puesto que los signos de las incógnitas x e y deben ser iguales, en total obtendremos cuatro soluciones.

Ejemplo 4. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0; \\ xy+y^2-12=0. \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema es una ecuación homogénea de segundo grado, puesto que su primer miembro es un polinomio homogéneo con respecto a las incógnitas x e y *), y el segundo miembro, nulo.
Tal ecuación siempre tiene solución nula: $x = 0$; $y = 0$. Sin embargo, el sistema no tiene solución nula, más aún, $y \neq 0$, puesto que para $y = 0$ la segunda ecuación se reduce a una igualdad falsa $-12 = 0$. Por lo tanto, ambos miembros de la primera ecuación se pueden dividir por y^2:

$$2\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 18 = 0;$$

---

*) Significa que todos sus términos son de igual potencia. Se denomina potencia del monomio la suma de los exponentes de las incógnitas; por ejemplo, cada uno de los monomios $5x^2$; $3xy$; $-0,5y^2$ son de segundo grado, por eso el polinomio $5x^2 + 3xy - 0,5y^2$ también es homogéneo.
El polinomio $x^3 - 2,5x^2y + 4y^3$ también es homogéneo, ya que todos sus términos son de tercer grado.
El polinomio $x^2 - 5xy + 3y$ no es homogéneo, puesto que los primeros dos términos son de segundo grado, mientras que el tercer término es de primer grado.

si ponemos $\frac{x}{y} = t$, tendremos la ecuación cuadrática

$$2t^2 + 5t - 18 = 0.$$

cuyas raíces son

$$t_1 = -\frac{9}{2}, \quad t_2 = 2.$$

De este modo, el sistema dado es equivalente al conjunto de dos sistemas:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{9}{2}; \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ xy + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

El primero de ellos no tiene soluciones reales, el segundo tiene dos soluciones:

$$x_1 = 4, \; y_1 = 2 \text{ y } x_2 = -4, \; y_2 = -2.$$

Ejemplo 5. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

El primer miembro de cada ecuación del sistema dado es un polinomio homogéneo de segundo grado con respecto a las incógnitas x e y (todos los términos de segunda dimensión), por eso es conveniente introducir una incógnita auxiliar t, suponiendo $y = tx$; en tal caso cada una de las ecuaciones del sistema dado después de la sustitución toma la forma

$$x^2 (1 - t + t^2) = 3; \; x^2 (2 - t - t^2) = 5.$$

Puesto que $x \neq 0$, dividamos la primera ecuación por la segunda y obtendremos

$$\frac{1 - t + t^2}{2 - t - t^2} = \frac{3}{5},$$

$$5 - 5t + 5t^2 = 6 - 3t - 3t^2,$$

o bien

$$8t^2 - 2t - 1 = 0,$$

es una ecuación cuadrática con respecto a la incógnita auxiliar t; resolviéndola, hallamos:

$$t_1 = -\frac{1}{4}; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $y = -\frac{1}{4}x$ ó $y = \frac{1}{2}x$.

A continuación vamos a resolver por el método de sustitución dos sistemas más sencillos:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

En total obtendremos cuatro soluciones:

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_2 = -\frac{4}{\sqrt{7}}; \; x_3 = -2; \; x_4 = 2;$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}; \; y_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_3 = -1; \; y_4 = 1.$$

§ 85. Método de resolución gráfica de un sistema de ecuaciones

Además del método de resolución analítica de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se puede utilizar también el método gráfico.

Construimos para cada ecuación del sistema dado la respectiva gráfica, es decir, la curva. Si las curvas se intersecan en el punto $M_1(x_1; y_1)$, en tal caso las coordenadas del punto de intersección son las soluciones del sistema. En efecto, puesto que el punto de intersección pertenece a ambas curvas, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones del sistema, siendo este par de números la solución del sistema.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

A la primera ecuación del sistema le corresponde la circunferencia de radio $r = \sqrt{13}$ con centro en el origen de coordenadas (fig. 44), a la segunda ecuación le corresponde la hipérbola equilátera cuyas ramas se encuentran en el primer y tercer cuadrantes. Las curvas se intersecan en cuatro puntos: $M_1(3; 2)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(-3; -2)$, $M_4(-2; -3)$. De este modo el sistema tiene cuátro soluciones.

El método de resolución gráfica posee la ventaja de que se aprecia inmediatamente la cantidad de soluciones reales que tiene el sistema dado.

Sin embargo, el método gráfico nos da sólo valores aproximados de estas soluciones, de ordinario con la exactitud de hasta 0,1. Para obtener una alta precisión, hay que con-

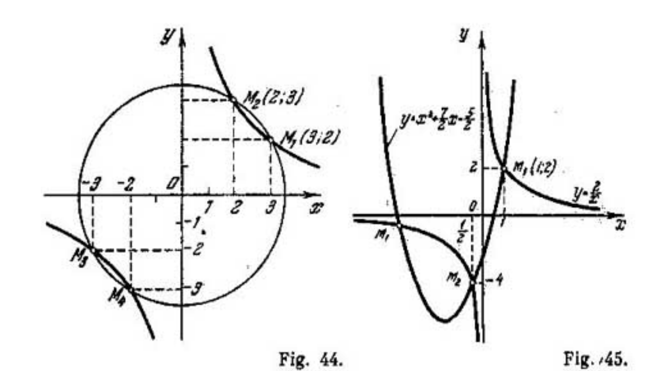


Fig. 44. Fig. 45.

struir las curvas en escala mayor, sobre papel milimetrado, lo que da lugar a una gran pérdida de tiempo. Precisamente ésta es la desventaja principal del método de resolución gráfica de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Se entiende que las curvas deben trazarse en una misma escala, si con ello nos proponemos hallar las soluciones del sistema.

Ejemplo 2. Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{cases} xy=2, \\ y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}. \end{cases}$$

En la fig. 45 se ha representado la hipérbola equilátera $y=\frac{2}{x}$ y la parábola $y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}$, las que se intersecan en los tres puntos: $M_1\left(-4;\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2};\ -4\right)$, $M_3\,(1;\ 2)$.

Por lo tanto, dicho sistema tiene tres soluciones:

$$\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-\frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}, \\ y_2=-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=2. \end{cases}$$

La resolución del sistema dado por el método de sustitución nos conduciría a una ecuación de la forma $x\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\right)=2$ ó $2x^3+7x^2-5x-4=0$. Esta es

una ecuación cúbica completa; los métodos de resolución de estas ecuaciones no se estudian en el curso de álgebra elemental. Hay que adivinar que el primer miembro de la ecuación se puede descomponer en factores:

$$2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = (x - 1)(2x^2 + 9x + 4) = 0.$$

Igualando a cero cada factor hallamos tres valores de x $\left(1;\ -4;\ -\frac{1}{2}\right)$, en tal caso los respectivos valores de y los hallamos de la relación $xy = 2$.

En este ejemplo el método de resolución gráfica tiene un aspecto más natural que el método algebraico, puesto que la descomposición del primer miembro en factores requiere la aplicación de procedimientos artificiosos.

▲ Ejercicios

1. Resolver las ecuaciones:

1) $\frac{4x^2-3x+5}{x^2-2x+13}=2;$

2) $\frac{5}{y+2}+\frac{9}{2y+3}=2;$

3) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{1-x}-\frac{6}{1-x^2};$

4) $2y^2-(b-2c)y=bc;$

5) $x^2+2(a-b)x-4ab=0;$

6) $6x^2+5mx+m^2=0;$

7) $56y^2+ay-a^2=0;$

8) $\frac{3m}{2m-1}-\frac{39}{2m+1}=5-\frac{45}{4m^2-1};$

9) $x+\frac{a}{x}=b;$

10) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0;$

11) $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b};$

12) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0;$

13) $\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\frac{x+6}{x-1}+\frac{x+36}{x^3-1};$

14) $(m-n)x^2-nx-m=0;$

15) $\frac{1}{2x-2}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4};$

16) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2;$

17) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}\,x+$ $+(a-b)^2=0;$

18) $\frac{x+5}{x+1}+\frac{3x+1}{x^2+3x+2}=2{,}5;$

19) $\frac{a-b+1}{ax+bx}=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{a-b}{x^2};$

20) $\frac{8}{x^2-9}+\frac{8}{3x+9}-\frac{5}{6}=0;$

21) $\frac{5t}{2t^2-t-1}-\frac{4t-5}{t^2-1}=\frac{5}{2t+1};$

22) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}.$

2. En un plano se han dado varios puntos dispuestos de manera que tres cualesquiera de ellos no se encuentran sobre una recta. Hay que determinar el número de puntos sabiendo que por ellos se pueden trazar en total 28 rectas distintas.

3. Resolver el problema anterior en forma general, si en total se pueden trazar m rectas diferentes.

4. Una parcela de tierra de 375 m² tiene forma rectangular, uno de sus lados constituye el 60% del otro. Hallar estos lados.

5. El perímetro de un rectángulo es de 85 cm, y su diagonal, 32,5 cm. Hallar los lados del rectángulo.
6. ¿Es posible un polígono convexo tal, en el que el número total de diagonales sea igual a 12?
7. ¿En qué polígono el número de lados es igual al número total de diagonales?
8. ¿Es posible un triángulo rectángulo tal, cuyos lados se expresen por tres números enteros sucesivos? ¿Por tres números sucesivos pares o impares?
9. Dos turistas se dirigen simultáneamente a una ciudad que se encuentra a la distancia de 30 km de ellos. El primero de ellos hace por hora 1 km más, debido a lo cual llega a la ciudad una hora antes. ¿Cuántos kilómetros por hora hace cada turista?
10. Una piscina se llena por intermedio de dos tubos en $1\frac{7}{8}$ hora; el primer tubo por separado puede llenar la piscina dos horas antes que el segundo tubo solo. ¿En cuántas horas cada uno de los tubos por separado puede llenar la piscina?
11. La distancia entre dos ciudades por río es de 80 km. Un barco pasa esta distancia dos veces (hacia arriba y hacia abajo) en 8 h 20 min. Determinar la velocidad del barco en agua muerta o estancada, si la velocidad de la corriente es de 4 km/hora.
12. La distancia entre dos estaciones ferroviarias es de 96 km. El tren rápido recorre este camino $\frac{2}{3}$ de hora más rápidamente que el tren de pasajeros ordinario. Hallar la velocidad de cada tren, si se sabe que la diferencia entre sus velocidades es de 12 km/hora.
13. Dos obreros trabajando juntos pueden cumplir una tarea dada en 12 horas. El primero de ellos por separado puede realizar el mismo trabajo 10 horas más rápidamente que el segundo. ¿En cuántas horas cada obrero por separado puede realizar la tarea?
14. Si una cooperativa de producción vende mercaderías por 2688 rublos, recibirá tanto por ciento de ganancia cuantas centenas de rublos contiene la mitad del precio de costo de la mercadería. ¿Cuál es el precio de costo de la mercadería?
15. Dos turistas A y B salieron simultáneamente de distintos lugares al encuentro mutuo. Al encontrarse resultó que A recorrió 210 km más que B. Si cada uno de ellos continúa su camino a la velocidad anterior, A llegará al lugar de salida de B después de 4 días, y B llegará al lugar de salida de A después de 9 días. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno de ellos hasta el encuentro?
16. Un turista salió de A a B y hace un promedio de 8 km/hora. Cuando éste recorrió 27 km, desde B a su encuentro salió otro turista, quien recorría en una hora la vigésima parte de todo el camino de B a A y se encontró con el primero después de tantas horas, como kilómetros por hora el mismo hace. Determinar la distancia de A a B.
17. Un agrónomo estableció que con la existencia de una reserva de semillas de 22,5 toneladas se puede plantar toda la parcela destinada a la patata. Durante la plantación se supo que las semillas eran selectas y por eso se puede disminuir la norma de plantación propuesta, aproximadamente, 200 kg por hectárea. Esto condujo al aumento de la superficie de siembra en 1 ha.
¿Cuál ha sido la norma de siembra de patata proyectada por hectárea y cuál es la superficie de la parcela inicial?

18. Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones con la exactitud de hasta 0,01:

1) $0,05x^2 - 4x + 7 = 0$; 3) $2,17x^2 - 1,8x - 1,06 = 0$;
2) $0,015y^2 + 2y - 3,75 = 0$; 4) $7x^2 - 8,06x + 2,16 = 0$.

19. Formar la ecuación cuadrática si sus raíces son:

1) 3 y 5;
2) -3 y 9;
3) 4 y $-\frac{1}{2}$;
4) 3 y -3;
5) 0 y 6;
6) 0 y $\frac{b}{a}$;
7) 4 y 4;
8) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$;
9) $a+b$ y $a-b$;
10) $\frac{m+n}{2}$ y $\frac{m-n}{2}$;
11) $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$;
12) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;
13) $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$.

20. Sin resolver las siguientes ecuaciones indicar cuáles tienen raíces reales y cuáles no tienen; cuáles de las ecuaciones con raíces reales tienen raíces iguales; cuáles tienen ambas raíces positivas o ambas negativas:

1) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
2) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
3) $x^2 - 16x + 48 = 0$;
4) $4x^2 + x + 1 = 0$;
5) $7x^2 - x - 1 = 0$;
6) $14y^2 + 11y - 3 = 0$;
7) $z^2 - 6z + 9 = 0$;
8) $y^2 + y - 6 = 0$.

21. ¿Para qué valores del coeficiente m cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos raíces iguales:

1) $4x^2 + mx + 9 = 0$;
2) $mx^2 + 4x + 1 = 0$;
3) $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$?

22. ¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes a, b y c para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga:
1) raíces reales positivas;
2) raíces reales negativas;
3) una raíz real positiva y otra negativa?

23. ¿Qué valor tiene m si la ecuación
1) $x^2 - 2ax + m = 0$ tiene una raíz igual a $a - b$;
2) $z^2 + mz - 18 = 0$ tiene una raíz igual a -3;
3) $mx^2 - 15x - 7 = 0$ tiene una raíz igual a -7;
4) $y^2 + my + a^2 + 5a + 6 = 0$ tiene una raíz igual a $a + 3$?

24. Si las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro k para que

1) $x_1 - x_2 = 6$;
2) $3x_1 - x_2 = 4$;
3) $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$;
4) $x_1^2 + x_2^2 = 34$?

25. ¿Para qué valores del término independiente $-a$ las raíces de la ecuación $3x^2 + 2x - a = 0$ son entre sí como 2 : 3?

26. Formar la ecuación cuadrática, cuyas raíces son iguales a $(x_1 + x_2)^2$ y $(x_1 - x_2)^2$, donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

27. Resolver las siguientes ecuaciones descomponiendo el primer miembro en factores:

1) $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$;
2) $y^3 + 3y^2 - 4y = 0$;
3) $v^3 + 11v^2 + 28v = 0$;
4) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;
5) $2z^3 - 5z^2 + 2z - 5 = 0$;
6) $x^3 - 8 = 0$;
7) $x^3 + 1 = 0$;
8) $y^4 - 2y^2 = 0$.

28. Formar la ecuación algebraica de grado inferior que tenga las siguientes raíces:

1) 1; 2 y -3;
2) 0 y ± 1;
3) ± 2 y ± 3;
4) -1; 2; 3 y 4;
5) a, b, $-c$ y d.

29. Resolver las ecuaciones:

1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
2) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$;
3) $u^4 - 11u^2 + 30 = 0$;
4) $3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$;
5) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

30. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales y verificar las raíces obtenidas:

1) $3+5\sqrt{x}=13$;
2) $11-3\sqrt{x}=5$;
3) $16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12$;
4) $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$;
5) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$;
6) $\frac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$;
7) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$;
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$;
9) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$;
10) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=$
$=\sqrt{4x-23}$;
11) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x+6a}=\sqrt{x-3a}$
12) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=$
$=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;
13) $\sqrt{x+4}=7$;
14) $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$;
15) $x+\sqrt{25-x^2}=7$;
16) $x-\sqrt{25-x^2}=1$;
17) $4x+\sqrt{5x+10}=17$;
18) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
19) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;
20) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$;
21) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
22) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=$
$=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$;
23) $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+$
$+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$;
24) $y\sqrt{\frac{a}{y}-1}=\sqrt{y^2-b^2}$;
25) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=$
$=x-a$;
26) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$;
27) $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}$;
28) $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

31. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=74; \\ x-y=2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=2; \\ xy=12. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y; \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2y^2=34; \\ x+y=7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1; \\ x+y=2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0; \\ x-y+1=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1; \\ x+y=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} y-x=2; \\ \dfrac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}; \\ x-y=2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+xy=12; \\ xy-y^2=2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} u^2+v^2=8; \\ \dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}=0,5. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2=65; \\ xy=28. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18; \\ x+y=12. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+xy+y=27; \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=45; \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x:12=3:y; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}; \\ x+y=20. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2,5; \\ x+y=10. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7; \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=a\sqrt{xy}; \\ x-y=b\sqrt{\dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1; \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+y=72; \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1; \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=a \ (a>0); \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}; \\ xy-x-y=9. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+ \\ +\sqrt{x+6y}=19; \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}= \\ =1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

32. El producto de dos números es igual a 135, y su diferencia, igual a 6. Hallar estos números.

33. La diferencia de dos números es a su producto como 1 : 24, y la suma de estos números es a su diferencia, como 5 : 1. Hallar estos números.

34. La suma de dos fracciones mutuamente inversas es igual a $2\frac{1}{6}$, y su diferencia, igual a $\frac{5}{6}$. Hallar estas fracciones.

35. Resolver las desigualdades:

1) $x^2-5x+4<0$,

2) $x^2>3x-2$;

3) $8x-3>x^2+4$;

4) $3x^2+4\geqslant 2x^2+5x$;

5) $\frac{2x+1}{x-1}<1$;

6) $|x^2-4|<5$;

7) $|x^2-5x|<4$;

8) $|9-x^2|\geqslant 3$.

36. Resolver los sistemas de desigualdades:

1) $\begin{cases} x^2+x<12, \\ x^2-x-2>0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-3|<2, \\ x^2+x>6. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3>0. \\ |x^2-5x+6|\leqslant 2. \end{cases}$

CAPITULO VIII

VECTORES

§ 86. Segmentos positivos y negativos en el eje

Supongamos dado el eje OP, es decir, una recta en la que se ha elegido el sentido positivo, el origen O y la unidad de escala (fig. 46). Tomemos una serie de puntos de este eje, por ejemplo, los puntos A, B, C, D, N.

Los segmentos AB, CD, BC, AN, etc., que se encuentran sobre el eje OP, los vamos a diferenciar no sólo por su longitud, sino también por el sentido: la primera letra A en la notación del segmento AB siempre se toma como origen del segmento, la segunda letra B designa el extremo del segmento. Al segmento AB se le atribuye el sentido hacia el cual nos desplazamos por el eje OP, recorriendo el segmento AB desde su origen A hasta el extremo B; si esta dirección coincide con el sentido positivo del eje OP, como se muestra en la fig. 46, el segmento se considera positivo, en el caso contrario, negativo. De lo expuesto se deduce que los segmentos AB, DC, NB son positivos; los segmentos BA, CD, BN son negativos.

● DEFINICION. El número real, cuya magnitud absoluta es igual a la longitud del segmento AB, tomado con signo positivo o negativo, según sea el segmento AB positivo o negativo, se llama *magnitud algebraica* del segmento.

Las magnitudes algebraicas de los segmentos AB y BA son dos números opuestos.

La longitud del segmento AB, tomado sobre el eje OP, la designaremos por $|AB|$.

Para la magnitud algebraica no vamos a introducir una notación especial, recordando que este concepto tiene sentido solamente para los segmentos positivos o negativos (es decir, que se encuentran en el eje). Por ejemplo, por AB designamos al mismo segmento y a su magnitud algebraica.

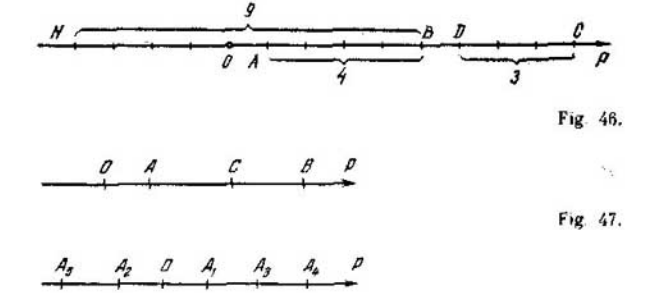


Fig. 46.

Fig. 47.

Se llama (por definición) suma de dos segmentos AB y BC, tomados en el eje, el segmento AC del mismo eje (fig. 46). Es evidente, que la magnitud algebraica de la suma de los segmentos es igual a la suma de las magnitudes algebraicas de los segmentos sumandos. Si sobre un eje se ha tomado n puntos arbitrarios $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, se llama suma de los segmentos $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n$ el segmento A_1A_n que une el primer punto A_1 con el último A_n (para $n = 5$, véase la fig. 47).

§ 87. Noción de vector

En matemática, física, mecánica y otras ciencias se encuentran magnitudes de dos géneros: unas de ellas, por ejemplo, la longitud, la superficie, el volumen, la masa, la temperatura, la capacidad términa, etc., se determinan por números, que expresan estas magnitudes en las respectivas unidades de medición. Estas magnitudes se admite en llamar *magnitudes escalares* o simplemente *escalares*.

Otras magnitudes, por ejemplo tales como la velocidad, la aceleración, la fuerza, la intensidad del campo electromagnético, etc., además de sus valores numéricos tienen una dirección determinada. Estas magnitudes se llaman *magnitudes vectoriales*. Toda magnitud vectorial se representa en forma de *vector*, es decir, de segmento dirigido con una flecha en el extremo. Generalmente los vectores se designan por letras latinas minúsculas negritas: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ...; sin embargo, cuando es necesario precisar que el origen del vector es el punto A, y el extremo, el punto B, lo designa-

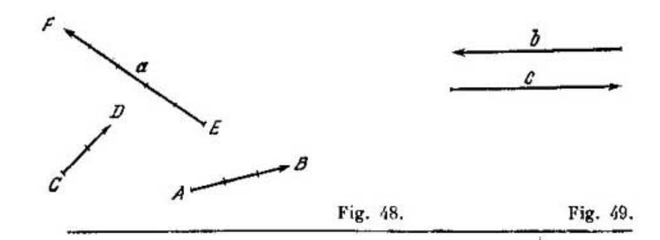


Fig. 48. Fig. 49.

mos por $\overrightarrow{AB}$. En la fig. 48 se muestran tres vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.

La longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ (medida con la unidad de escala adoptada) se llama su *módulo* y se designa por $|\overrightarrow{AB}|$. Frecuentemente el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ se designa por la misma letra a, pero con letra cursiva. Por ejemplo, en la fig. 48

$$|\overrightarrow{AB}| = 3; \ |\overrightarrow{CD}| = 2; \ |\overrightarrow{EF}| = |\boldsymbol{a}| = a = 5.$$

Así, pues, el módulo de un vector es un número (escalar) siempre positivo.
Dos vectores son *iguales* cuando tienen módulos iguales y la misma dirección. De esta definición se deduce que un vector se puede trasladar paralelamente a sí mismo, sin que varíe.
Dos vectores con iguales módulos, pero dirigidos en sentidos opuestos se llaman *opuestos*. En la fig. 49 los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son opuestos.
El vector, opuesto al vector $\boldsymbol{a}$, se designa por $-\boldsymbol{a}$.

§ 88. Operaciones con vectores

Por las reglas establecidas con los vectores se pueden realizar las operaciones aritméticas, como con los números, es decir, las magnitudes escalares.
1. Suma de vectores. Tengamos tres vectores: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Se denomina suma de estos vectores un vector construido según la siguiente regla (fig. 50,*a*).

En un punto arbitrario A trazamos el vector $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$; para ello trasladamos el vector $\boldsymbol{a}$ paralelamente a sí mismo de manera que su origen coincida con el punto A; análogamen-

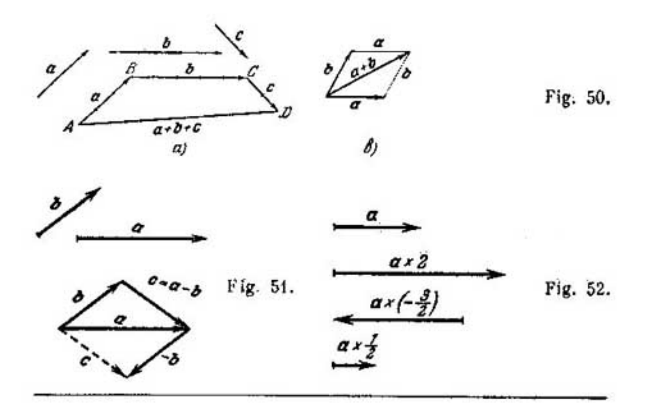


Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

te, en el punto B trazamos el vector $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$; en el punto C construimos el vector $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$; se obtiene una línea quebrada vectorial (línea poligonal) $ABCD$. El vector $\overrightarrow{AD}$, que va desde el origen del primer vector hasta el extremo del último, se llama *suma**) de los tres vectores dados (por definición). La suma de dos vectores a veces se construye del siguiente modo: se llevan los vectores a un origen común y se construye sobre ellos, como sobre dos lados adyacentes, un paralelogramo; entonces, el vector que va en diagonal, desde el origen común es, precisamente, su suma (fig. 50,*b*).

2. Diferencia de vectores. Se denomina *diferencia* entre el vector $\boldsymbol{a}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ un tercer vector $\boldsymbol{c}$ tal que sumado al vector $\boldsymbol{b}$ nos da el vector $\boldsymbol{a}$. Tal vector se puede construir del siguiente modo: llevamos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ a un origen común (fig. 51). El vector que va desde el extremo del vector $\boldsymbol{b}$ al extremo del vector $\boldsymbol{a}$ es precisamente la diferencia entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Observación. La diferencia del vector $\boldsymbol{b}$ se puede cambiar por la suma del vector opuesto $-\boldsymbol{b}$. El resultado será el mismo. Cabe hacer notar que si dirigimos los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ por dos lados adyacentes de un paralelogramo, el vector

*) Se conoce bajo el nombre de resultante. (*Nota del T.*)

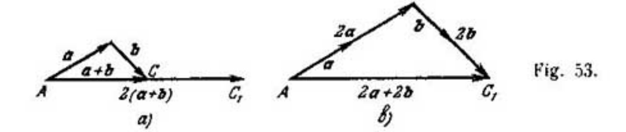


Fig. 53.

que va por una de las diagonales es la suma, y por la otra diagonal, la diferencia de los vectores dados.

3. Producto de un vector por un escalar. Multiplicar un vector $\boldsymbol{a}$ por un escalar m significa aumentar su longitud (módulo) m veces, conservando el sentido primario del vector si $m > 0$, ó variando este sentido por el opuesto si $m < 0$. En la fig. 52 se muestran los casos: 1) $\boldsymbol{a}\cdot 2$; 2) $\boldsymbol{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$; 3) $\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{2}$. Para todo vector $\boldsymbol{a}$ se puede construir su vector unitario $\boldsymbol{a}^0$, que tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{a}$, y longitud igual a la unidad. Siendo así, por la regla de multiplicación de un vector por un escalar, tendremos

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0\cdot a.$$

Todo vector $\boldsymbol{a}$ *es igual a su vector unitario* $\boldsymbol{a}^0$ *multiplicado por el módulo del vector* $\boldsymbol{a}$, *es decir, por el número positivo* a. La notación $\boldsymbol{a}\cdot 2$ y $2\boldsymbol{a}$ significa lo mismo. Si la suma de vectores se multiplica por un escalar, cada vector sumando se puede multiplicar por este escalar y luego sumar los resultados obtenidos. En la fig. 53 se muestra el producto de la suma de vectores $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ por el escalar 2; este producto se ha realizado de dos maneras: a) el vector $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ se multiplica por 2 (la longitud aumenta dos veces); se obtiene el vector $\overrightarrow{AC_1}$ igual a $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ (fig. 53, *a*); b) el vector $\overrightarrow{AC_1}$ se ha obtenido como suma de los vectores $2\boldsymbol{a}$ y $2\boldsymbol{b}$ (fig. 53, *b*).

§ 89. Proyección de un vector sobre un eje

Como sabemos, se llama *proyección de un punto M* sobre un eje el pie de la perpendicular MM_1 bajada desde el punto M a ese eje, es decir, el punto M_1.

Supongamos dados el eje l y un vector arbitrario $\overrightarrow{AB}$ (fig. 54). Bajemos las perpendiculares desde el origen y el extremo del vector al eje. Sobre el eje obtendremos el segmento A_1B_1,

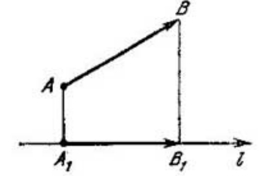


Fig. 54.

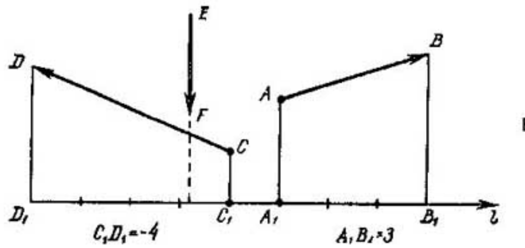


Fig. 55.

cuya magnitud algebraica se llama, precisamente, *proyección del vector* $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje l, y se escribe del siguiente modo: proy $_l\overrightarrow{AB} = A_1B_1$.

● DEFINICIÓN. Se llama *proyección de un vector* sobre un eje el número (escalar) que expresa la magnitud algebraica del segmento en el eje, limitado por las proyecciones del origen y del extremo de dicho vector.

En la fig. 55 se muestra que

proy $_l\overrightarrow{AB} = A_1B_1 = 3$;

proy $_l\overrightarrow{CD} = C_1D_1 = -4$;

proy $_l\overrightarrow{EF} = 0$,

puesto que el vector $\overrightarrow{EF}$ es perpendicular al eje l. Es evidente que, si el vector es paralelo al eje de proyección y tiene igual sentido que el eje, su proyección es igual a la longitud del vector; si el sentido del vector es contrario al eje l, entonces

proy $_l\boldsymbol{a} = -a$.

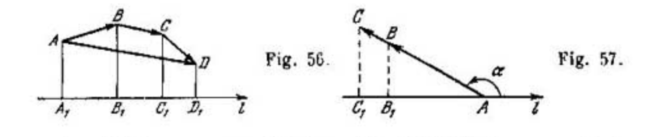


Fig. 56. Fig. 57.

Teorema 1. *La proyección de la suma de vectores sobre un eje es igual a la suma de las proyecciones de cada uno de los vectores sumandos sobre el mismo eje.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el vector $\overrightarrow{AD}$ es la suma de tres vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (fig. 56). En tal caso,

$$\text{proy}\ _l\overrightarrow{AD} = A_1D_1. \quad (1)$$

Proyectemos cada uno de los vectores sumandos sobre el mismo eje:

$$\text{proy}\ _l\overrightarrow{AB} = A_1B_1;\ \text{proy}\ _l\overrightarrow{BC} = B_1C_1;\ \text{proy}\ _l\overrightarrow{CD} = C_1D_1. \quad (2)$$

Sumando estas igualdades, obtenemos:

$$\text{proy}\ _l\overrightarrow{AB} + \text{proy}\ _l\overrightarrow{BC} + \text{proy}\ _l\overrightarrow{CD} = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1. \quad (3)$$

Los segundos miembros de las igualdades (1) y (3) son iguales entre sí, por lo tanto, también lo serán los primeros miembros:

$$\text{proy}\ _l\overrightarrow{AD} = \text{proy}\ _l\overrightarrow{AB} + \text{proy}\ _l\overrightarrow{BC} + \text{proy}\ _l\overrightarrow{CD}.$$

Observación. Frecuentemente el teorema que hemos demostrado se formula también del siguiente modo: la proyección de una quebrada vectorial (línea poligonal) sobre un eje es igual a suma de las proyecciones de cada uno de los componentes de la quebrada e igual a la proyección del vector de cierre o vector resultante sobre ese mismo eje. $\overrightarrow{AD}$ es el *vector de cierre* de la quebrada vectorial $ABCD$.

Teorema 2. *Para el ángulo dado α, formado por vector con el eje l, la relación de la proyección del vector a su módulo es un número determinado, independiente del módulo del vector*. En la fig. 57 dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un mismo ángulo α con el eje l, además

$$\text{proy}\ _lAB = AB_1,\ \text{proy}\ _l\overrightarrow{AC} = AC_1.$$

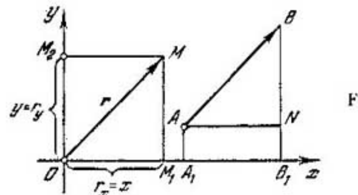


Fig. 58.

De la semejanza de los triángulos rectángulos ABB_1 y ACC_1 tenemos

$$\frac{|AB_1|}{AB}=\frac{|AC_1|}{AC}; \qquad (4)$$

las proyecciones de los vectores se han tomado por el valor absoluto, puesto que en geometría los lados de los triángulos siempre se expresan por números positivos. Empero las proyecciones AB_1 y AC_1 tienen el mismo signo (en la fig. 57 ambas son negativas), por lo cual podemos omitir los signos de valor absoluto en la igualdad (4), y obtendremos

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC},$$

lo que se quería demostrar.

Observación. Si $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$; proy $_l\boldsymbol{a}=a_l$, proy $_l\boldsymbol{b}=b_l$, la confirmación del teorema se escribe así:

$$\frac{a_l}{a}=\frac{b_l}{b}.$$

§ 90. Coordenadas de un vector

Supongamos que en el sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares) xOy se ha dado el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 58).

● DEFINICION. El vector dirigido desde el origen de coordenadas hacia el punto arbitrario M del plano xOy, se llama *radio vector del punto M* y se designa por $\boldsymbol{r}$;

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r},$$

Proyectemos el vector $\boldsymbol{r}$ sobre el eje Ox y el eje Oy, obtendremos

$$\text{proy}\ _x\boldsymbol{r} = OM_1 = \boldsymbol{r}_x, \quad \text{proy}\ _y\boldsymbol{r} = OM_2 = \boldsymbol{r}_y.$$

Se demuestra fácilmente que si el vector r deja de ser radio vector y se desplaza paralelamente a sí mismo en la nueva posición $\overrightarrow{AB}$, sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas no varían. Esto se deduce de la igualdad de los triángulos rectángulos ΔOM_1M y ΔABN:

$$|\boldsymbol{r}| = |\overrightarrow{AB}|,$$
$$|OM_1| = |A_1B_1|,$$

pero, dado que el sentido de los segmentos OM_1 y A_1B_1 es el mismo, se puede prescindir del signo de valor absoluto:

$$OM_1 = A_1B_1 = \text{proy}\ _x\boldsymbol{r}.$$

De tal modo, cada vector dado en el plano xOy tiene proyecciones completamente determinadas sobre los ejes de coordenadas; también se verifica lo recíproco; dos proyecciones dadas sobre los ejes de coordenadas determinan completamente el vector.

● DEFINICION. Las proyecciones de un vector sobre los ejes de coordenadas se denominan *coordenadas del vector*.
Las coordenadas del vector se admite en expresar por la notación:

$$\boldsymbol{a} = \{x, y\},$$

donde $x = \text{proy}\ _x\boldsymbol{a}$, $y = \text{proy}\ _y\boldsymbol{a}$. La primera coordenada x puede llamarse abscisa del vector $\boldsymbol{a}$, y la segunda coordenada y, ordenada del vector $\boldsymbol{a}$. Las coordenadas del radio vector $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ son al mismo tiempo coordenadas del punto M, es decir, extremo del radio vector.
Si el origen del vector no coincide con el origen de coordenadas, las coordenadas del vector y las coordenadas del extremo del vector no son las mismas, pero, en tal caso, se cumple la correlación

$$\overrightarrow{AB} = \{x, y\} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\},$$

puesto que $x = \text{proy}\ _x\overrightarrow{AB} = x_B - x_A$, $y = \text{proy}\ _y\overrightarrow{AB} = y_B - y_A$, lo que se ve claramente en la fig. 58.

T e o r e m a. *Las coordenadas de la suma de dos vectores son iguales a la suma de las coordenadas respectivas de los vectores sumandos.*

■ DEMOSTRACIÓN. Dado $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1\}$; $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2\}$; hay que demostrar que $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$, donde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Por el teorema de proyección de la suma de vectores sobre un eje, tendremos

$$\text{proy}_x \boldsymbol{c} = \text{proy}_x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_x \boldsymbol{a} + \text{proy}_x \boldsymbol{b} = x_1 + x_2,$$
$$\text{proy}_y \boldsymbol{c} = \text{proy}_y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_y \boldsymbol{a} + \text{proy}_y \boldsymbol{b} = y_1 + y_2.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$.

§ 91. Descomposición de un vector según los ejes de coordenadas

Un vector arbitrario $\overrightarrow{AB}$ del plano de coordenadas xOy se puede considerar como suma de dos vectores dirigidos según los ejes de coordenadas. Para ello es suficiente proyectar el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre los ejes de coordenadas (fig. 59). En tal caso obtenemos dos vectores proyecciones del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje Ox y el eje Oy, o sea, el vector $\overrightarrow{A_1B_1}$ y el vector $\overrightarrow{A_2B_2}$, la suma de los cuales es igual al vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{AB}.$$

Esto se deduce de la igualdad

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}, \text{ puesto que } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A_2B_2}, \ \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{A_1B_1}.$$

● DEFINICIÓN. Los vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{A_2B_2}$ se llaman *componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ según los ejes de coordenadas.*

Tomemos sobre cada uno de los ejes de coordenadas un vector que tenga la dirección del correspondiente eje:
$\boldsymbol{i}$ es el vector unitario del eje Ox,
$\boldsymbol{j}$ es el vector unitario del eje Oy.
Supongamos que

$$\overrightarrow{AB} = \{x, y\}.$$

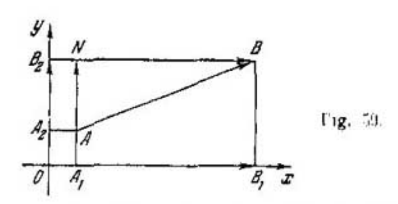


Fig. 59.

En tal caso según la regla de multiplicación de un vector por un escalar, tendremos:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{A_2B_2} = y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

Hemos obtenido una de las fórmulas fundamentales del álgebra vectorial:

Todo vector del plano de coordenadas xOy es igual a la suma del producto de sus coordenadas por los correspondientes vectores unitarios de los ejes.

§ 92. Producto escalar de dos vectores

▶ Problema. Por acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$ un cuerpo realiza un movimiento de avance, de manera que su centro de gravedad O se desplaza al punto M; además OM forma un ángulo de 60° con el sentido de acción de la fuerza (fig. 60). Calcular el trabajo realizado por la fuerza si $|\boldsymbol{F}| = F = 12$ kgf y $OM = 5$ m.

Si la dirección de la fuerza coincide con el sentido de desplazamiento, el trabajo A es igual al producto del módulo de la fuerza por el camino recorrido. En este caso la regla no es aplicable puesto que la fuerza actúa bajo un ángulo.

Descompongamos la fuerza $\boldsymbol{F}$ en dos componentes: $\boldsymbol{F}_1$, dirigida según la recta OM, y $\boldsymbol{F}_2$, perpendicular a $\boldsymbol{F}_1$. El trabajo lo realiza solamente la componente horizontal $\boldsymbol{F}_1$, su módulo (véase el triángulo rectángulo en la fig. 60) $F_1 = F \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (kgf), por lo cual el trabajo realizado $A =$

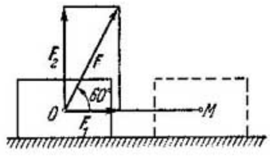


Fig. 60.

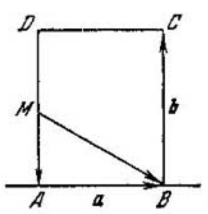


Fig. 61.

$= 6 \cdot 5 = 30$ (kgm). En este problema hemos tenido dos vectores: el vector fuerza $\boldsymbol{F}$ y el vector desplazamiento $\overrightarrow{OM}$. Fue necesario poner en correspondencia con ellos una cierta magnitud escalar, en este caso, el trabajo.

● DEFINICIÓN. Se llama *producto escalar* o interno del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman
$\boldsymbol{ab} = ab \cos \varphi$,
donde φ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
De este modo, el trabajo es el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 12 \cdot 5 \cos 60° = 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ (kgm)}.$$

§ 93. Distintos problemas con vectores

▶ Problema 1. Sobre los lados del rectángulo $ABCD$ se han construido los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$. Expresar mediante estos dos vectores dados el vector $\overrightarrow{MB}$, si M es el punto medio del lado AD (fig. 61).

Tenemos que: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, pero $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $AB = \boldsymbol{a}$, por eso $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

▶ Problema 2. Construir un vector $\boldsymbol{c}$ igual a $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Construyamos un vector igual al doble del vector $\boldsymbol{a}$ (el origen del vector es el punto arbitrario A). Lo sumamos con el vector contrario al vector $\boldsymbol{b}$, es decir, con el vector $(-\boldsymbol{b}) =$

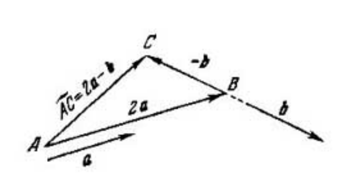


Fig 62

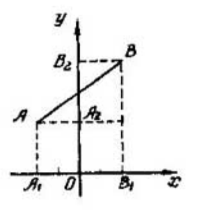


Fig 63.

$= \overrightarrow{BC}$. En tal caso el vector $\overrightarrow{AC}$ es igual a la suma $2\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ (fig. 62)

▶ **Problema 3.** Dado el vector $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, siendo $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$; hallar las proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas; el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ y el vector unitario $\boldsymbol{a}^0$ del vector $\boldsymbol{a}$ (fig. 63).

La proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje Ox es igual a la magnitud algebraica del segmento A_1B_1, que se encuentra sobre el eje Ox. El segmento A_1B_1 es positivo y de longitud igual a $2 - (-2) = 4$ unidades. La proyección del vector sobre el eje de ordenadas es igual a $6-3 = 3$.
El módulo (la longitud del vector) es igual a

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

El vector unitario $\boldsymbol{a}^0$ del vector dado $\boldsymbol{a}$ lo hallamos de la igualdad $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0 \cdot a$, de donde $\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{5}$.

▶ **Problema 4.** Demostrar que si $\boldsymbol{a} = \{-1, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{3, 3\}$, entonces $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{2, 5\}$ (fig. 64).
Por el teorema de proyección de la suma de vectores tenemos:
$\text{proy}_x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_x\boldsymbol{a} + \text{proy}_x\boldsymbol{b} = -1 + 3 = 2.$
Tomemos la proyección sobre el eje Oy:
$\text{proy}_y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{proy}_y\boldsymbol{a} + \text{proy}_y\boldsymbol{b} = 2 + 3 = 5.$
Así, pues, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{2, 5\}$.

▶ **Problema 5.** Hallar la descomposición de $\overrightarrow{AB}$ según los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ de los ejes de coordenadas, si $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$ (fig. 65).

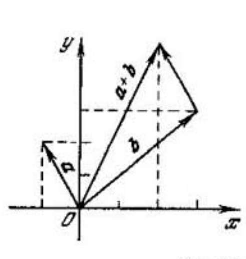


Fig. 64.

Fig. 65.

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{proy}\ {}_x\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 4 - (-2) = 6,$$

$$\text{proy}\ {}_y\overrightarrow{AB} = y_B - y_A = 5 - 3 = 2,$$

$$\overrightarrow{AB} = 6i + 2j$$

▲ **Ejercicios**

1. Representar tres vectores cualesquiera y construir su suma.
2. Trazar dos vectores arbitrarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y construir un vector igual a la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
3. Sobre los lados del rectángulo ABC se han construído los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{c}$. ¿A qué es igual la suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$?
4. Comentar las siguientes igualdades vectoriales: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})$ (propiedad conmutativa), $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ (propiedad asociativa), $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,m = \boldsymbol{a}m + \boldsymbol{b}m$ (propiedad distributiva).
5. Representar un vector arbitrario $\boldsymbol{a}$ y junto a él construir los vectores: $\boldsymbol{a}\,\frac{3}{2}$; $\boldsymbol{a}\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-2\boldsymbol{a}$.
6. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje que forma con el vector un ángulo de 120°, si $|\boldsymbol{a}| = 8$.
7. Sobre los lados AB y AD del rectángulo $ABCD$ se han trazado (desde el punto A) los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$. Expresar por $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, si la longitud de los lados de rectángulo es $AB = 4$, $AD = 6$.
8. M y N son los puntos medios de los lados CD y BC del rectángulo $ABCD$ (véase el problema anterior). Determinar los vectores: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{MN}$, expresándolos por los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.
9. En el origen de coordenadas se han aplicado tres fuerzas: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, además A (0; −2), B (4; 2), C (4; −2).

Construír la resultante de estas tres fuerzas, hallar sus coordenadas y calcular la magnitud de la misma.

10. Demostrar que los puntos A (3, -1), B (1; 2), C (-1; 1) D (1; -2) son vértices de un paralelogramo.

O b s e r v a c i ó n. Las coordenadas semejantes de los vectores paralelos son proporcionales.

11. Dados tres vértices sucesivos del paralelogramo: A (1; 1), B (4; 5), C (-2; 2); hallar las coordenadas del cuarto vértice D, opuesto al vértice B, utilizando el método vectorial.

12. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, hallar el producto escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

13. Utilizando el producto escalar hallar el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

14. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 8\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, hallar las proyecciones proy $_{b}\boldsymbol{a}$ y proy $_{a}\boldsymbol{b}$.

15. Sobre los dos vectores $\boldsymbol{a} = \{2, 1\}$ y $\boldsymbol{b} = \{-1, 5\}$ se ha construido un paralelogramo; hallar el ángulo entre sus diagonales.

16. Dado $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, además $\boldsymbol{a} = \{3, 4\}$; $\boldsymbol{b} = \{8, y\}$, hallar el número y.

17. Verificar por el método vectorial que las diagonales del rombo se dividen en el punto de intersección por la mitad.

18. Dados tres vectores: $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2\}$, $\boldsymbol{c} = \{x_3, y_3\}$, demostrar que $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

19. Calcular $\left| \boldsymbol{i} - \frac{2(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})}{5} \right|$, si $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ son dos vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

20. Calcular $\left| \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{3} \right|$, si $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ y el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 60°.

CAPITULO IX

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA

§ 94. Generalización del concepto de ángulo

En la Geometría el ángulo se define como una figura formada por dos rayos que parten de un punto común; en este caso no se hace distinción entre los lados del ángulo: el ángulo AOB o el ángulo BOA se consideran iguales. Además, nunca en geometría se tropieza con ángulos negativos.

Establezcamos un concepto más general sobre el ángulo como sobre una magnitud algebraica, que puede adquirir valores cualesquiera: positivos, negativos o nulo.

Tracemos el eje OP desde el origen O y con un radio cualquiera r describimos una circunferencia. Supongamos que esta circunferencia interseca al eje OP en el punto A (fig. 66). Si M es un punto arbitrario de la circunferencia, le corresponde el vector $\overrightarrow{OM}$, el que en adelante denominaremos *radio vector* del punto M. En tal caso, el ángulo $AOM = \alpha$ lo consideraremos formado por rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, desde la posición inicial OA hasta la posición OM:

OA es el lado inicial del ángulo (lado fijo),
OM es el lado extremo o final del ángulo.

● DEFINICIÓN. El ángulo α se considera *positivo* si está formado por la rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y *negativo*, si el vector $\overrightarrow{OM}$ gira en el sentido de las agujas del reloj. Sin embargo, a la posición dada OM del lado extremo le corresponde no sólo el único ángulo α: el vector $\overrightarrow{OM}$ que gira al principio en el sentido positivo el ángulo α, después de esto puede cumplir cualquier número entero de revoluciones en sentido positivo o negativo, luego de lo cual su extremo resulta

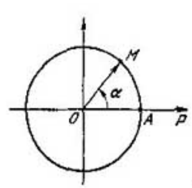


Fig. 66.

Fig 67

invariablemente en el mismo punto fijado M. Por lo tanto, a la posición dada del lado extremo del ángulo le corresponde un conjunto infinito de ángulos tanto positivos como negativos. Todos estos ángulos se obtienen por la fórmula

$$\beta = \alpha + 360^\circ k,$$

donde k es un número entero cualquiera, incluso 0:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

E j e m p l o. Si el radio vector $\overrightarrow{OM}$ se gira en sentido positivo un ángulo de 120° con respecto al lado inicial OA, a tal posición del vector $\overrightarrow{OM}$ corresponden: a) los ángulos positivos de 120°, 480° 840°, 1200°, . . .; b) los ángulos negativos de (−240)°, (−600°), (−960°), . . . Todos los ángulos enumerados están contenidos en la fórmula

$$\beta = 120^\circ + 360^\circ k$$

cuando $k = 0, 1, 2, 3$ para los ángulos positivos a) y cuando $k = -1, -2, -3$ para los ángulos negativos b).

§ 95. Medida en radianes de los ángulos

Al medir los ángulos en grados se toma como unidad del ángulo aquel que es igual a 1/90 del ángulo recto y se llama *grado angular* (1°).

En las Matemáticas, así como en otras ciencias (física, mecánica, astronomía, etc.), se utiliza ampliamente una medida de ángulos distinta, denominada *radian*.

Supongamos que α es un ángulo central, al que corresponden dos acros ANB y $A_1N_1B_1$ (fig. 67) de radios $OA = r$ y $OA_1 = r_1$. Si la longitud del arco ANB lo designamos por l, la longitud del arco $A_1N_1B_1$, por l_1, se demuestra fácilmente que

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1},$$

es decir, para el ángulo central α dado la relación de la longitud del arco, sobre el cual se apoya, a la longitud del radio es una magnitud constante, independiente de la medida del radio. En efecto, la longitud del arco, correspondiente al ángulo central, en α grados, será:

$$l = \frac{2\pi r\alpha}{360} + \frac{\pi r\alpha}{180},$$

$$l_1 = \frac{2\pi r_1\alpha}{360} = \frac{\pi r_1\alpha}{180},$$

de donde

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi\alpha}{180}, \quad \frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

De la igualdad de los segundos miembros se deduce la igualdad de los primeros:

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1}.$$

lo que se quería demostrar. Designamos $\frac{l}{r} = a$.

● DEFINICIÓN 1. El número a, igual a la relación de la longitud del arco l, correspondiente a un cierto ángulo central, a la longitud del radio r, se llama *medida en radian* del ángulo dado.

En el sistema de medición en radianes se admite como unidad el ángulo, para el cual $l = r$, en tal caso $a = 1$. Este ángulo se denomina *radian*.

● DEFINICIÓN 2. Se denomina *radian* un ángulo central tal cuya longitud del arco es igual al radio.

De este modo, 1) si la longitud del arco es igual a dos radios, el ángulo es de 2 radianes, 2) si $l = \frac{1}{3} r$, el ángulo es igual a un tercio de radian.

Observación. Frecuentemente en la literatura matemática no se escribe «radian» sino sólo se sobreentiende; por ejemplo, se escribe $\angle AOB = 1{,}5$ en lugar de la notación completa $\angle AOB = 1{,}5$ radian.

§ 96. Dependencia entre las medidas de ángulos en radianes y en grados

Todo ángulo medido en grados se puede convertir en radianes y, viceversa, el ángulo medido en radianes se puede convertir en grados.

Hallemos en primer término cuántos grados contiene 1 radian. Se sabe que la longitud de una circunferencia contiene 2π radios, por lo tanto,

$360° = 2\pi$ (rad),
$180° = \pi$ (rad),

de donde en 1 radian se tendrá

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3,14159\ldots} \approx 57°17'44,8''.$$

Con menor precisión se tomará el radian igual a 57°18'. Supongamos que α es la medida en grados de cierto ángulo; a, la medida en radianes del mismo ángulo; en tal caso se cumple la siguiente proporción:

$$\alpha : 180 = \quad : \pi,$$

de donde

$$a = \frac{\pi\alpha}{180}. \qquad (1)$$

Mediante la fórmula (1) formemos la tabla de las medidas en radianes y en grados de algunos ángulos

$\alpha°$	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

En esta tabla se dan las medidas en radianes de los ángulos más usuales; además, esta medida está expresada mediante el número π, cuyo valor aproximado se puede tomar con la exactitud deseada. Por ejemplo, $30° = \frac{\pi}{6}$ (rad), de donde $30° \approx \frac{3,14}{6}$ (rad) $\approx 0,52$ (rad), $30° \approx \frac{3,1416}{6}$ (rad) $\approx$ $\approx 0,5236$ (rad), etc. De la fórmula (1) se puede hallar el ángulo en $\alpha°$; obtendremos:

$$\alpha° = \frac{180° a}{\pi}. \qquad (2)$$

La fórmula (2) nos da la medida en grados del ángulo según radianes.

E j e m p l o. $a = 0,3$; hallar $\alpha°$:

$$\alpha° = \frac{180° \cdot 0,3}{\pi} \approx \frac{54}{3,14} \approx 17°.$$

Para una rápida conversión de cualquier ángulo medido en grados a radianes y viceversa existen las correspondientes tablas en todas las guías.
Resolvamos dos ejemplos utilizando las tablas de cuatro cifras de V. M. Bradis.*)

E j e m p l o 1. Convertir en radianes el ángulo de 64°38'. Por las tablas de Bradis hallamos:

$$64°36' = 1{,}1275$$
$$2' = 0{,}0006$$
$$64°38' = 1{,}1281 \text{ (rad)}$$

E j e m p l o 2 Expresar en grados y minutos el ángulo de 2,154 rad. Puesto que en las tablas de Bradis no existe tal ángulo, su medida en grados se hallará en dos etapas

$$1{,}1537 \text{ rad} = 66°6'$$
$$1{,}0003 \text{ rad} = 57°19'$$
$$2{,}154 \text{ rad} = 123°25'$$

§ 97. Longitud del arco de circunferencia

De la fórmula $a = l/r$ (véase § 77) se deduce que $l = ra$; en otras palabras, *la longitud del arco de circunferencia es igual al radio multiplicado por la medida en radianes del ángulo central correspondiente a este arco.*

E j e m p l o. Calcular la longitud del arco de circunferencia de radio $r = 20$ cm, si el arco contiene 34°18' (de arco). El ángulo central correspondiente a este arco también contiene 34°18' (angulares), pero

$$34°18' = 0{,}5986 \text{ (rad)},$$

y por eso

$$l = 20 \cdot 0{,}5986 = 11{,}972 \text{ (cm)}.$$

§ 98. Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

El los cursos superiores de la escuela media se dan las definiciones de seno, coseno, tangente y cotangente de un ángu-

*) Son las tablas logarítmicas para la escuela media. (*Nota del T.*)

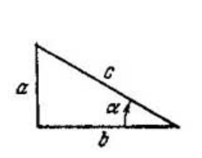


Fig. 68.

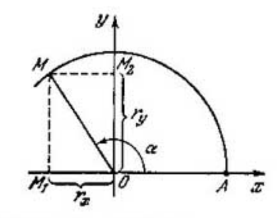


Fig. 69.

lo agudo α como relación de los lados de un triángulo rectángulo (fig. 68):

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.$$

Puesto que estas definiciones corresponden solamente a un ángulo agudo α $(0 < \alpha < 90°)$, no se puede hablar de seno, coseno, tangente y cotangente de ángulos tales, como, por ejemplo, de 0°, 90°, 120°, puesto que el ángulo agudo de un triángulo rectángulo no puede tomar tales valores.

Empero se puede dar una nueva definición de estas magnitudes de manera que ellas correspondan a cualquier ángulo α.

Tracemos dos ejes mutuamente perpendiculares Ox y Oy. Desde el punto de su intersección O con un radio arbitrario r describimos una circunferencia que corte al eje Ox en el punto A (fig. 69).

Supongamos que M es un punto cualquiera de la circunferencia, al que corresponde el radio vector $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = \{x, y\}$. El lado inicial del ángulo $AOM = \alpha$ se considerará siempre el lado OA, que se encuentra sobre el eje Ox, el lado extremo será OM. Notemos una vez más, que α es un ángulo formado por el vector $\boldsymbol{r}$ con el sentido positivo del eje Ox.

● DEFINICIÓN 1. Se llama *seno de un ángulo* α la relación de la ordenada del vector $\boldsymbol{r}$ al módulo del mismo vector:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}. \qquad (1)$$

● DEFINICIÓN 2. Se llama *coseno de un ángulo* α la relación de la abscisa del vector $\boldsymbol{r}$ al módulo del mismo vector:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}. \tag{2}$$

● DEFINICIÓN 3. Se llama *tangente de un ángulo* α la relación de la ordenada del vector $\boldsymbol{r}$ a su abscisa:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

● DEFINICIÓN 4. Se llama *cotangente de un ángulo* α la relación de la abscisa del vector $\boldsymbol{r}$ a su ordenada:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \tag{4}$$

Está claro que el seno, el coseno, la tangente y la cotangente son números abstractos, Variando el ángulo α las coordenadas x e y del vector varían, el módulo del vector permanece constante, y, por eso, sen α, cos α, tg α y ctg α serán magnitudes variables dependientes del ángulo α; debido a lo cual se llaman funciones trigonométricas del ángulo α.

Observación 1. Además de las cuatro funciones trigonométricas citadas, a veces se consideran dos funciones más.

● DEFINICIÓN 5. Se llama *secante de un ángulo* α la magnitud inversa al coseno:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

● DEFINICIÓN 6. Se llama *cosecante de un ángulo* α la magnitud inversa al seno:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{6}$$

Observación 2. Si el ángulo α es agudo, las nuevas definiciones de las funciones trigonométricas coinciden con las anteriores, puesto que ambas coordenadas x e y son positivas y catetos del triángulo rectángulo con el ángulo agudo α.

Observación 3. Basándonos en el teorema demostrado respecto a que la relación de la proyección del vector sobre un eje al módulo del vector no depende del módulo del vector (véase el teorema 2 del § 89), se pueden dar definiciones

más sencillas del seno y del coseno de un ángulo α. Tomando como $\boldsymbol{r}$ el vector unitario, es decir, $r = |\boldsymbol{r}| = 1$, obtendremos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x.$$

Se llama seno de un ángulo α el número que expresa la ordenada y del radio vector unitario, y coseno de un ángulo α, el número que expresa la abscisa x del radio vector unitario. Tal interpretación del seno y del coseno es conveniente para estudiar sus variaciones al girar el radio vector unitario $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Corolario. De las fórmulas (1) y (2) se deduce que $x = r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$, donde α es un ángulo arbitrario. En adelante utilizaremos estas igualdades.

§ 99. Signos de las funciones trigonométricas

Los ejes de coordenadas Ox y Oy dividen la circunferencia de radio unitario en cuatro partes cada una de las cuales se llama *cuadrante*. En la fig. 70 se muestra la numeración de los cuadrantes. Supongamos que el vector variable $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ gira desde la posición inicial, coincidente con el vector $\overrightarrow{OA}$, en sentido positivo y cumple un giro. Por lo tanto, el ángulo α en este caso varía de 0° a 360° (en radianes de 0 a 2π). Veamos a continuación cómo varían durante la rotación del vector $\overrightarrow{OM}$ los signos de sus coordenadas x e y, puesto que de los signos de las coordenadas dependen los signos de las mismas funciones trigonométricas.

a) La ordenada y se conserva positiva hasta que el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$, es decir, el punto M, se mantiene en la mitad superior de la circunferencia. Cuando el extremo del vector describe la mitad inferior de la circunferencia, la ordenada y es negativa. Por lo tanto, el seno es positivo para los ángulos que terminan en los I y II cuadrantes, y negativo para los ángulos que terminan en los III y IV cuadrantes.

b) La coordenada x del vector $\overrightarrow{OM}$ es positiva si el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$ se encuentra en la mitad derecha de la cir-

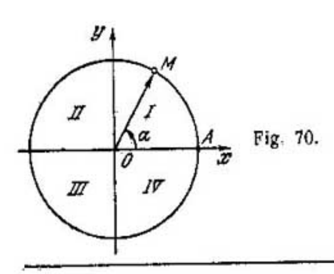


Fig. 70.

cunferencia, lo que corresponde a los ángulos que terminan en los I y IV cuadrantes. Si el extremo del vector rotatorio $\overrightarrow{OM}$ describe la mitad izquierda de la circunferencia, lo que corresponde a los ángulos que terminan en los II y III cuadrantes, la coordenada x es negativa. De este modo, los cosenos de los ángulos que terminan en los I y IV cuadrantes son positivos, y en los II y III cuadrantes son negativos.

c) Conociendo los signos de las coordenadas x e y del vector $\boldsymbol{r}$, se establecen fácilmente los signos de la tangente y la cotangente de cada cuadrante, puesto que por definición $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. De aquí se deduce que la tangente y la cotangente son positivas en los cuadrantes en que ambas coordenadas del vector son de signos iguales, lo que ocurre para los ángulos que terminan en los I y III cuadrantes. En los II y IV cuadrantes la tangente y la cotangente son negativas, puesto que x e y son de signos contrarios.

Como resultado del estudio del signo de las funciones trigonométricas tendremos la siguiente tabla:

Cuadrante / Función	I	II	III	IV
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−
ctg α	+	−	+	−

Observación. El signo de secante coincide con el signo de coseno, y el signo de la cosecante, con el signo de seno, lo que se deduce de las definiciones 5 y 6 del § 98.

§ 100. Variación de las funciones trigonométricas al variar el ángulo α en los límites de la primera circunferencia

Analicemos la variación de cada una de las cuatro funciones trigonométricas por separado al variar el ángulo de 0° a 360° (de 0 a 2π). Para ello lo más sencillo es partir de la circunferencia unitaria, para la cual (véase el § 98) $\operatorname{sen} \alpha = y$; $\cos \alpha = x$.

1. Variación del seno. Si el ángulo α crece de 0° a 90°, el $\operatorname{sen} \alpha$ crece de 0 a 1 (fig. 71). Con el crecimiento ulterior del ángulo de 90° a 180° el seno decrece de 1 a 0. En el III cuadrante con la variación del ángulo de 180° a 270° el seno continúa decreciendo de 0 a -1. En el IV cuadrante, al variar el ángulo de 270° a 360° el seno crece de -1 a 0.

2. Variación del coseno. En la fig. 72 se muestra la variación del coseno: en el I cuadrante al crecer el ángulo α de 0° a 90° el coseno decrece de 1 a 0; en el II cuadrante con el crecimiento del ángulo α de 90° a 180° el $\cos \alpha$ continúa decreciendo de 0 a -1; al variar el ángulo α de 180° a 270° el $\cos \alpha$ crece de -1 a 0; por último, en el IV cuadrante al variar el ángulo α de 270° a 360° el coseno crece de 0 a 1.

3. Variación de la tangente. Por definición $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.

Para representarnos claramente la variación de la tangente tratemos de tomar para cada ángulo α, sobre un cierto eje, un segmento, cuya magnitud algebraica es igual a $\frac{y}{x}$, es decir, igual a $\operatorname{tg} \alpha$.

Construyamos una circunferencia de radio unitario. En el extremo del radio OA, que se encuentra sobre el eje Ox, trazamos la tangente AT, cuyo punto A tomamos como origen de lectura de los segmentos. Como sentido positivo del

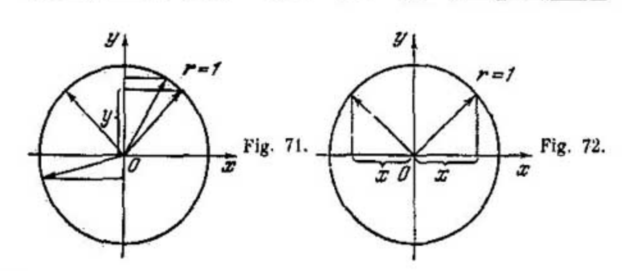
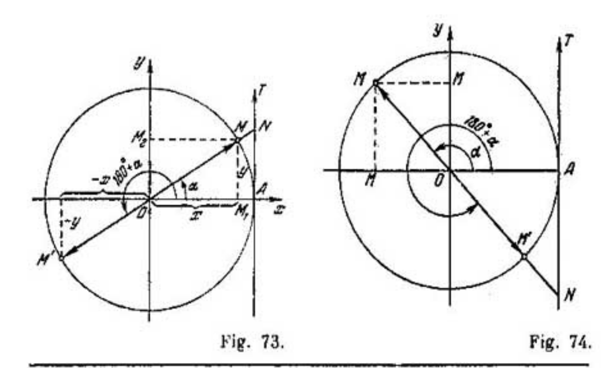


Fig. 71. Fig. 72.


Fig. 73. Fig. 74.

eje AT tomamos el sentido desde el punto A hacia arriba (fig. 73).

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma un ángulo α con el eje Ox. Continuamos la recta, en la que se encuentra el vector $\overrightarrow{OM}$ hasta cortar el eje AT en el punto N, obtenemos el segmento AN sobre el eje AT. Demostremos que su magnitud algebraica AN es igual a tg α. Si el ángulo α termina en el I cuadrante, el segmento ON es positivo. De la semejanza de los triángulos OM_1M y OAN se deduce la proporción $\frac{M_1M}{OM_1}=\frac{AN}{OA}$, ó $\frac{y}{x}=AN$, es decir, tg $\alpha = AN$.

Si el ángulo α termina en el II cuadrante (fig. 74), el segmento AN es negativo. En este caso, las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM}$ tienen signos distintos, y por eso, su relación es un número negativo. Por lo tanto, los números $\frac{y}{x}$ y AN tienen signos iguales; queda solamente demostrar la coincidencia de sus valores absolutos. De la semejanza de los triángulos rectángulos OMM_1 y OAN (ambos tienen el mismo ángulo agudo), tendremos:

$$\frac{|M_1M|}{|OM_1|}=\frac{|AN|}{1}, \quad \text{ó} \quad \left|\frac{M_1M}{OM_1}\right|=|AN|$$

(la razón de las magnitudes absolutas de dos números es igual a la magnitud absoluta de su relación). Suprimiendo el signo de magnitud absoluta, obtendremos $\frac{y}{x}=AN$, es decir, tg $\alpha = AN$.

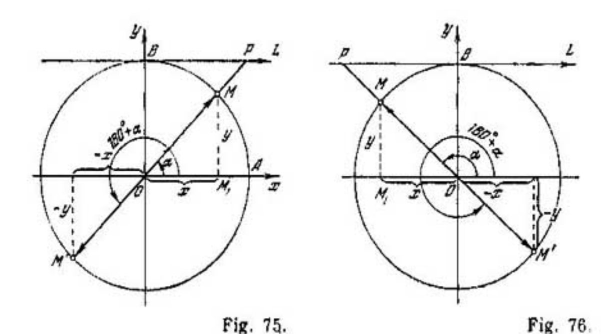


Fig. 75. Fig. 76.

Proponemos a los lectores verificar el cumplimiento de la igualdad tg $\alpha = AN$ (véase las figs. 73 y 74) cuando el ángulo termina en los III y IV cuadrantes.

A continuación se establece fácilmente lo siguiente.

1) Si el ángulo α crece desde 0° hasta 90°, la tg $\alpha = AN$, permaneciendo positiva, crece ilimitadamente a medida que el ángulo α tiende al ángulo de 90° y deja de existir para $\alpha = 90°$, puesto que el vector $\overrightarrow{OM}$ deviene paralelo al eje AT. Convencionalmente se escribe que

tg $\alpha \rightarrow +\infty$ para $\alpha \rightarrow 90°$.

2) Al crecer el ángulo α desde 90° hasta 180° la tangente se hace de signo negativo, y su valor absoluto decrece hasta 0 (fig. 74).

3) Puesto que (véase la fig. 73) tg α = tg $(180° + \alpha)$, al variar el ángulo α desde 180° hasta 270° la tangente varía de igual modo que en el I cuadrante.

4) Análogamente la variación de la tg α en el IV cuadrante es la misma que en el II, lo que se puede apreciar de la fig. 74.

4. Variación de la cotangente. Por analogía con el punto anterior, como eje tomamos la tangente BL trazada a la circunferencia unitaria en el extremo del radio OB, que se encuentra sobre el eje Oy. El punto B es el origen de lectura de los segmentos, por sentido positivo se toma el del punto B hacia la derecha (fig. 75). En tal caso, BP = ctg α, donde P es el punto de intersección de la recta, en el que se encuentra el vector $\overrightarrow{OM}$, con el eje BL. La demostración de esto la reducimos a la suposición de que el ángulo α ter-

mina en el cuadrante I; el análisis de los tres casos que quedan los dejamos a los lectores (véase las figs. 75 y 76).
En realidad, de la semejanza de los triángulos rectángulos OMM_1 y OBP se deduce la siguiente proporción

$$\frac{OM_1}{M_1M}=\frac{BP}{OB} \text{ ó } \frac{x}{y}=\frac{BP}{1}. \qquad (1)$$

De este modo, $\frac{x}{y}=BP$, es decir, $\operatorname{ctg}\alpha = BP$.

Ahora se estudia fácilmente la variación de la cotangente al variar el ángulo.
1) Para $\alpha = 0$ el segmento BP es paralelo al eje Ox, por lo tanto, el ángulo de 0° no tiene cotangente.
Supongamos que α varía desde 0° hasta 90°, en tal caso el segmento BP, manteniéndose positivo, disminuye desde los valores infinitamente grandes hasta 0 (véase la fig. 75).
2) Al variar el ángulo desde 90° hasta 180° el segmento BP crece ilimitadamente en valor absoluto, conservando su signo negativo (fig. 76). Por lo tanto, la cotangente sigue decreciendo, desapareciendo para $\alpha = 180°$, lo que convencionalmente escribimos así: $\operatorname{ctg}\alpha \to -\infty$ cuando $\alpha \to \to 180°$.
3) Si el ángulo α varía desde 180° hasta 270°, la ctg α varía de igual modo que al variar el ángulo α desde 0° hasta 90°, es decir, decrece desde ∞ hasta 0. Esto se debe a que $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(180° + \alpha)$, lo que se comprueba con facilidad geométricamente (véase la fig. 75).
4) Análogamente al variar el ángulo desde 270° hasta 360° la cotangente varía de igual modo que al variar el ángulo desde 90° hasta 180° (véase la fig. 76).

§ 101. Construcción de un ángulo por el valor dado de una función trigonométrica

Veamos en los ejemplos la construcción del ángulo α.

Ejemplo 1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$.

Dividamos el radio de la circunferencia $OB = 1$ en tres partes iguales (fig. 77). A la distancia de 2/3 del punto O trazamos una perpendicular a OB hasta cortar la circunferencia en los puntos M y M_1. Obtendremos los dos ángulos buscados:

$$\angle AOM = \alpha_1 \text{ y } \angle AOM_1 = \alpha_2.$$

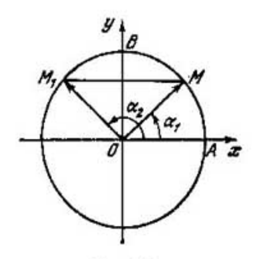


Fig. 77.

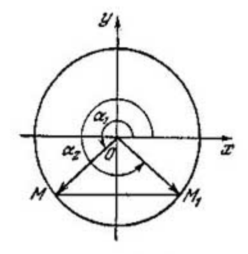


Fig. 78.

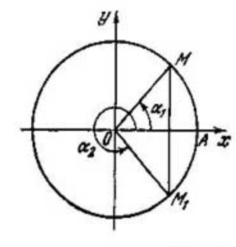


Fig. 79.

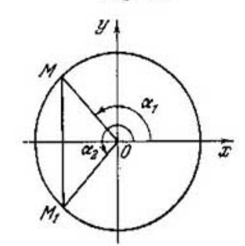


Fig. 80.

E j e m p l o 2. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4}$.

En la fig. 78 se muestra una construcción análoga a la descripta antes. Obtenemos dos ángulos: el primero, α_1, termina en el III cuadrante; el segundo, α_2, termina en el IV cuadrante.

E j e m p l o 3. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Dividamos el radio horizontal $OA = 1$ (fig. 79) en cinco partes iguales. A la distancia de 4/5 del punto O trazamos una perpendicular a OA hasta cortar la circunferencia en los puntos M y M_1; obtendremos dos ángulos α_1 y α_2 que terminan en los cuadrantes I y IV.

E j e m p l o 4. $\cos \alpha = -0{,}7 = -\frac{7}{10}$.

La construcción está dada en la fig. 80. Obtenemos dos ángulos: el primero, α_1, termina en el II cuadrante; el segundo, α_2, en el III cuadrante.

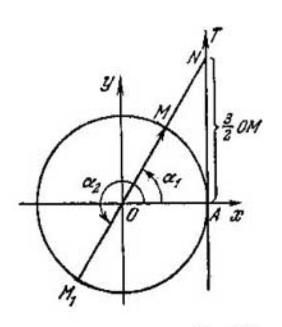


Fig. 81.

Fig. 82.

Ejemplo 5. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

Construyamos una circunferencia arbitraria y tracemos el eje de tangentes AT (fig. 81). Sobre el eje de tangentes, desde el punto de tangencia A, trazamos en sentido positivo el segmento AN, igual a un radio y medio; unimos el punto N con el centro de la circunferencia y OM lo continuamos hasta obtener el segundo punto de intersección M_1. En tal caso, $\alpha_1 = \angle AOM$ y $\alpha_2 = \angle AOM_1$ son los ángulos buscados.

Ejemplo 6. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

La construcción es análoga a la anterior y está dada en la fig. 82.

Observación 1. La dualidad de las respuestas deja de ser rigurosa, si sobre el ángulo α se impone una limitación; por ejemplo,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3} \quad (90^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Ahora el ángulo α debe tomarse solamente del segundo cuadrante (ángulo α_1 en la fig. 82).

Observación 2. La construcción de un ángulo por la secante y la cosecante puede ser sustituida por la construcción según el coseno y el seno. Por ejemplo, si la $\sec\alpha = 2$, ó $\frac{1}{\cos\alpha} = 2$, entonces $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Exactamente de igual modo no es necesario construir un ángulo por la cotangente. De la igualdad $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{5}$ se deduce que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$.

§ 102. Valores de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos

En adelante tropezaremos frecuentemente con ángulos tales como 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°, o en radianes, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π. Se recomienda memorizar los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Aclaremos como se han hallado los números puestos en la tabla:

Angulo α / Denominación de la función	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$r_y = \operatorname{sen} \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$r_x = \cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\frac{r_y}{r_x} = \operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0
$\frac{r_x}{r_y} = \operatorname{ctg} \alpha$	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	No existe	0	No existe

Supongamos que $\alpha = 30°$, es decir, el radio vector $\overrightarrow{OM}$ de la circunferencia unitaria forma un ángulo de 30° con el eje Ox; ambas coordenadas son positivas y son los catetos de un triángulo de hipotenusa $r = 1$.

Por lo tanto, $x^2 + y^2 = 1$. Empero $y = \frac{1}{2}$ (el cateto opu-

esto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la hipotenusa), y por eso,

$$x=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen} 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30°=\frac{y}{x}=$ $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} 30°=\frac{x}{y}=\sqrt{3}$.

De igual manera se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de los demás ángulos, que recomendamos que lo hagan los lectores.

§ 103. Dependencias entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

Supongamos que α es un ángulo arbitrario formado por el vector $\overrightarrow{OM}$ con el eje Ox, en tal caso

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{r};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}. \tag{1}$$

Elevemos al cuadrado las igualdades (1) y sumemos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{y^2}{r^2} \\ +\ \cos^2\alpha=\frac{x^2}{r^2} \\ \hline \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{y^2+x^2}{r^2} \end{array} \tag{2}$$

Pero las coordenadas de los vectores x e y, tomadas en valor absoluto, son las longitudes de los catetos; la suma de sus cuadrados es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$x^2+y^2=r^2,$$

debido a lo cual, la igualdad (2) toma la forma

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{3}$$

La suma de los cuadrados del seno y del coseno de un mismo ángulo es igual a 1.

Por definición $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$; la magnitud de la fracción $\frac{y}{x}$ no

varía si dividimos el numerador y el denominador por el número r:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

La tangente de un ángulo es la razón del seno de este ángulo al coseno del mismo ángulo (se supone que $\cos\alpha \neq 0$).

Por definición $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$. Empero,

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{5}$$

La cotangente de un ángulo es la razón del coseno de este ángulo al seno del mismo ángulo ($\operatorname{sen}\alpha \neq 0$).

Si a las identidades (3), (4), y (5) agregamos dos más,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \tag{7}$$

entonces obtenemos cinco relaciones mutuamente independientes entre seis funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Deduzcamos algunos corolarios de las igualdades (3) — (7).

1) Multiplicando las igualdades (4) y (5), obtendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

o bien

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

La cotangente de un ángulo es la magnitud inversa de la tangente y viceversa.

2) Dividiendo ambos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$; obtendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Basándonos en las igualdades (4) y (6) tendremos:

$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$.

De un modo semejante dividiendo ambos miembros de la igualdad (3) por $\mathrm{sen}^2\,\alpha$, obtendremos:

$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \mathrm{cosec}^2\,\alpha$.

§ 104. Cálculo de los valores de todas las funciones triginométricas por el valor dado de una de ellas

Ejemplo 1. Dado: $\mathrm{sen}\,\alpha = 0{,}6$, hallar los valores de todas las demás funciones.

1) Inmediatamente se puede hallar el valor inverso del seno, es decir, del $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$.

2) De la correlación $\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, hallamos:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-(0{,}6)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

El doble signo $\pm$ lo escribimos puesto que no se sabe en qué cuadrante termina el ángulo α.

3) Hallamos la magnitud inversa del coseno:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{5}{4}$$

4) De la identidad $\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$ hallamos la tangente:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\pm\frac{4}{5}} = \pm\frac{3}{4}.$$

5) Por la tangente hallamos la magnitud inversa a ella: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \pm\frac{4}{3}$.

Observación. Si se sabe en qué cuadrante termina el ángulo α, se elimina la dualidad en los signos.

Ejemplo 2. $\mathrm{tg}\,\alpha = -2{,}4$ $(90° < \alpha < 180°)$. Calcular los valores de las demás funciones trigonométricas.

1) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{-2{,}4} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$.

2) De la relación $1+\text{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ hallamos:

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+(-2,4)^2}=-\frac{13}{5}$$

3) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$

4) De la identidad $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha$ se deduce que $\text{sen}\,\alpha=$ $=\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha$; de donde

$$\text{sen}\,\alpha=\left(-\frac{5}{13}\right)(-2,4)=\frac{12}{13}.$$

5) $\text{cosec}\,\alpha=\frac{13}{12}$.

Más adelante se da la tabla en la que cualquiera de las cuatro funciones, sen α, cos α, tg α y ctg α, está expresada por cualquiera de las tres restantes, suponiendo que no se señala en qué cuadrante termina el ángulo α.
Se recomienda a los estudiantes componer individualmente esta tabla.

Funciones \ Mediante las funciones	sen α	cos α	tg α	ctg α
sen α	sen α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\text{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	cos α	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\text{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$
tg α	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tg α	$\frac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$
ctg α	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$	ctg α

§ 105. Distintos ejemplos y problemas

Ejemplo 1. Calcular el valor de la fracción $\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}$ para $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$.

Dividamos el numerador y el denominador de dicha fracción por $\cos\alpha$ ($\cos\alpha\neq 0$), por lo que la magnitud de la fracción no varía; obtendremos:

$$\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}\right|_{\text{para } \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}-1}{\frac{2}{5}+1}=-\frac{3}{7}.$$

Ejemplo 2. Dado:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=p, \qquad (1)$$

hallar la suma $\operatorname{tg}^2\alpha\pm\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Elevemos ambos miembros de la igualdad (1) al cuadrado:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\underbrace{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}_{2}=p^2,$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=p^2-2.$$

Ejemplo 3. Demostrar que la fracción

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

no puede tomar valores negativos.

Transformemos dicha fracción:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}\geqslant 0;$$

puesto que ambos factores $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ y $\frac{1+\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$ no pueden ser negativos, su producto tampoco es negativo.

Ejemplo 4. Hallar el ángulo $x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, si $3\operatorname{sen}x=2\cos^2 x$. Tenemos

$$3\operatorname{sen}x=2(1-\operatorname{sen}^2 x),$$

o bien

$$2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}\, x - 2 = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado con respecto a sen x:

$$(\text{sen}\, x)_{1,\,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4};$$

$$\text{sen}\, x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ (no es posible)},$$

$$\text{sen}\, x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

El ángulo agudo buscado $x = \frac{\pi}{6}$ (rad), ó $x = 30°$.

§ 106. Demostración de identidades

En la Trigonometría se tropieza frecuentemente con dos expresiones de diferentes aspectos, pero, que para todos los valores admisibles de los ángulos adquieren iguales valores numéricos. Estas dos expresiones se llaman *idénticas*. Para cerciorarnos de que la igualdad dada es una identidad, o como suele decirse, *demostrar la identidad*, de ordinario se transforma un miembro de la igualdad y se reduce éste al otro miembro. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Demostrar la identidad

$$\frac{(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\text{ctg}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha} = 2\,\text{tg}^2\,\alpha.$$

Reducimos el primer miembro al segundo:

$$\frac{(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\text{ctg}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - 1}{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} - \text{sen}\,\alpha\right)} = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha}{\frac{1-\text{sen}^2\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}} = \frac{2\,\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\,\text{tg}^2\,\alpha.$$

El primer miembro de la igualdad inicial se convirtió exactamente en una misma expresión que la del segundo miembro, con lo que se demuestra la identidad.

Ejemplo 2. Demostrar que

$$\frac{2-\text{cosec}^2\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha - 1} - \text{cosec}^2\,\alpha + 1 = \text{ctg}\,\alpha.$$

Reducimos nuevamente el primer miembro. como el más complejo, al segundo; además, expresamos todas las funciones trigonométricas por la cotangente:

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=$$

$$=\frac{1-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-1}-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-\operatorname{ctg}\alpha)}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ejemplo 3. Demostrar la identidad

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Reducimos el segundo miembro al primero;

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha.$$

En ciertos casos al demostrar las identidades conviene transformar ambos miembros a una misma expresión.

Ejemplo 4. Demostrar la identidad

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}. \qquad (1)$$

Representemos dicha identidad en la siguiente forma:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Transformemos el primer miembro:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\,(\operatorname{sen}\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\cos\alpha}.$$

Transformemos el segundo miembro:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}=\frac{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

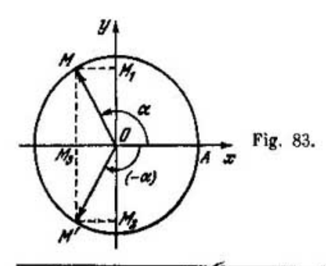


Fig. 83.

Con esto la identidad queda demostrada.

§ 107. Reducción de funciones trigonométricas de argumento negativo a funciones de argumento positivo

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma con el eje Ox un ángulo α; el vector $\overrightarrow{OM'}$, el ángulo $(-\alpha)$ (fig. 83; $OM = 1$); en tal caso

$$\text{sen}\ \alpha = OM_1;\ \text{sen}\ (-\alpha) = OM_2.$$

Las proyecciones OM_1 y OM_2 son iguales entre sí en valor absoluto, pero de signos contrarios; por lo tanto,

$$OM_2 = -OM_1,$$

o bien

$$\text{sen}\ (-\alpha) = -\ \text{sen}\ \alpha.$$

Los puntos M y M' son simétricos con respecto al eje Ox, es decir, se encuentran sóbre una perpendicular al eje y a igual distancia a ambos lados de él, por eso, los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OM'}$ tienen la misma proyección sobre el eje Ox; por lo tanto,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Ahora deducimos fácilmente que:

$$\text{tg}\,(-\alpha) = \frac{\text{sen}\,(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha,$$

$$\text{ctg}\,(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\text{sen}\,(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha} = -\text{ctg}\,\alpha,$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

De este modo, el signo menos en el argumento del coseno y de la secante se puede simplemente omitir, en tanto que el signo menos del seno, de la tangente, la cotangente y la cosecante se pone ante la notación de la misma función. En otras palabras, $y = \cos x$ es una función par (§ 50), en tanto que $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$ son funciones impares.

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen}(-120°) = -\operatorname{sen} 120° = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos(-210°) = \cos 210° = \cos(180° + 30°) =$
$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$;

4) $\operatorname{cosec}(-300°) = -\operatorname{cosec} 300° = -\operatorname{cosec}(360° - 60°) =$
$= \operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 108. Fórmulas de reducción

En este párrafo se darán las fórmulas, por las cuales los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo α, que no exceda los límites $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, se pueden expresar por los correspondientes valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Estas fórmulas se llaman *fórmulas de reducción*.

1. Fórmulas de reducción para los ángulos que terminan en el II cuadrante. Todo ángulo, que termina en el II cuadrante, se puede representar o bien como una suma de $90° + \alpha$, o bien como una diferencia de $180° - \alpha$. Por ejemplo,

$115° = 90° + 25°$, $115° = 180° - 65°$.

De acuerdo a estas dos formas diferentes de representación de un mismo ángulo obtenemos dos series de fórmulas de reducción. En la fig. 84 se han representado dos circunferencias de radio unitario; en la primera de ellas se ha trazado un ángulo de $90° + \alpha$, en la segunda, un ángulo α.

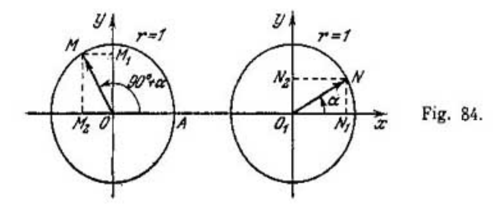


Fig. 84.

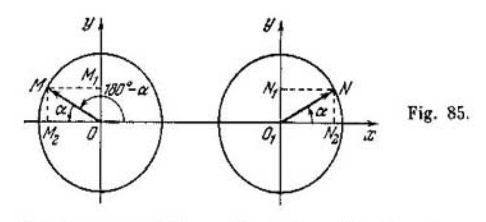


Fig. 85.

Supongamos que $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$, $\overrightarrow{O_1N} = \{x_1, y_1\}$;

$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = OM_1 = y$,

$\cos \alpha = O_1N_1 = x_1$.

De la igualdad de los triángulos rectángulos OM_1M y O_1N_1N se deduce que $|OM_1| = |O_1N_1|$, ó $|y| = |x_1|$.
Eliminando el signo de magnitud absoluta, ya que y y x_1 son positivos, obtenemos $y = x_1$, o $\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$.
De la misma figura 84 se deduce que

$\cos(90^\circ + \alpha) = OM_2$, $\operatorname{sen} \alpha = O_1N_2$.

Las proyecciones OM_2 y O_1N_2 son de igual valor absoluto pero de signos contrarios, por lo cual

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

En la fig. 85 tenemos otro par de circunferencias unitarias, en las que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma con el eje Ox el ángulo de $180° - \alpha$; el vector O_1N, el ángulo α: $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = OM_1$, $\operatorname{sen}\alpha = O_1N_1$. Las coordenadas OM_1 y O_1N_1 son iguales en magnitud y signo:

$$OM_1 = O_1N_1,$$

o bien

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

Luego,

$$\cos(180° - \alpha) = OM_2, \ \cos\alpha = O_1N_2.$$

Las coordenadas OM_2 y O_1N_2 son de igual valor absoluto y de signos contrarios:

$$OM_2 = -O_1N_2,$$

o bien

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

A continuación se puede hallar los valores de la tangente y la cotangente:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ejémplos. 1) $\operatorname{sen}150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg}60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos 110° = \cos(90° + 20°) = -\operatorname{sen}20° \approx -0{,}342$.

2. Fórmulas de reducción para ángulos que terminan en el III cuadrante. El ángulo que termina en el III cuadrante se puede representar o bien como suma de $180° + \alpha$, o bien como diferencia de $270° - \alpha$.

En la fig. 86 se han representado en dos circunferencias unitarias los ángulos $180° + \alpha$ y α:

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = OM_1, \ \operatorname{sen}\alpha = O_1N_1;$$

las coordenadas OM_1 y O_1N_1 son de igual valor absoluto y de signos contrarios; por to tanto, $OM_1 = -O_1N_1$, ó

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

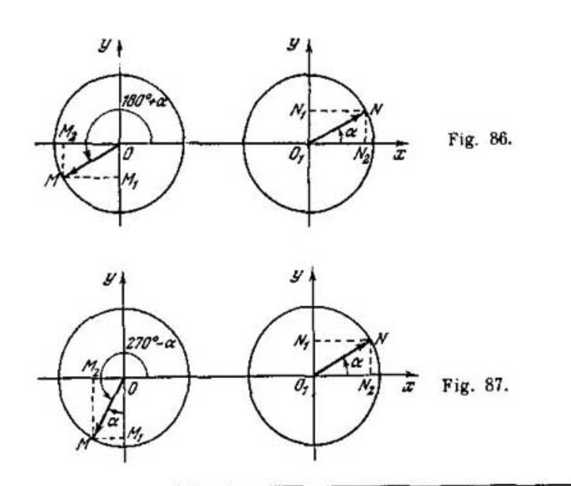


Fig. 86.

Fig. 87.

De manera semejante establecemos que

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha,$

$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$

$\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$

En la fig. 87 se muestran los ángulos $270° - \alpha$ y α en dos circunferencias unitarias. De acuerdo a lo representado en la figura, tendremos

$\operatorname{sen}(270° - \alpha) = OM_1$, $\cos\alpha = O_1N_2$; $OM_1 = -O_1N_2$,

de donde

$\operatorname{sen}(270° - \alpha) = -\cos\alpha.$

De un modo análogo hallamos que

$\cos(270° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha,$

$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$

$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$

E j e m p l o s. 1) $\operatorname{sen} 250° = \operatorname{sen}(270° - 20°) = -\cos 20° \approx -0{,}9397$;

2) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

Recomendamos a los lectores deducir individualmente las fórmulas de reducción para los ángulos, que terminan en el IV cuadrante, es decir, los ángulos del tipo de $270° + \alpha$, ó $360° - \alpha$.

§ 109. Generalidad de las fórmulas de reducción

Al deducir las fórmulas de reducción hemos supuesto que el ángulo α, que compone el argumento, es agudo. Sin embargo, las fórmulas se satisfacen para cualquier α.
Demostremos, por ejemplo, que tiene lugar la fórmula

$$\text{sen}\,(90° + \alpha) = \cos\alpha. \tag{1}$$

En primer lugar, de su justeza para los ángulos, que varían en los límites de la primera circunferencia, se deduce la justeza para todos los ángulos. En efecto, si el ángulo $\alpha > 360°$ ó $\alpha < 0°$, éste se puede representar en la forma $\alpha = \beta + 360° \cdot n$, donde $\beta < 360°$, n es un número entero (positivo o negativo). Pero, de acuerdo a la definición de las funciones trigonométricas (§ 98) $\text{sen}\,(90° + \alpha) = \text{sen}\,[360° \cdot n + (\beta + 90°)] = \text{sen}\,(\beta + 90°)$, $\cos\alpha = \cos\,(\beta + 360° \cdot n) = \cos\beta$; por lo tanto, $\text{sen}\,(90° + \alpha) = \cos\alpha$, puesto que para β esta fórmula se cumple por suposición.*)
Demostremos a continuación la fórmula (1) para los ángulos α, que varían en los límites de la primera circunferencia. Supongamos que α es un ángulo del II cuadrante, es decir, $\alpha = 90° + \beta$, $0 < \beta < 90°$. En tal caso, dado que

$$\text{sen}\,(90° + \alpha) = \text{sen}\,(180° + \beta) = -\text{sen}\,\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos\,(90° + \beta) = -\text{sen}\,\beta,$$

ambos miembros de la igualdad (1) coinciden, por lo tanto, en este caso la fórmula es justa.
Supongamos ahora que α es un ángulo del III cuadrante, es decir, $\alpha = 180° + \beta$, $0 < \beta < 90°$, En tal caso

$$\text{sen}\,(90° + \alpha) = \text{sen}\,(270° + \beta) = -\cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos\,(180° + \beta) = -\cos\beta,$$

de donde se desprende nuevamente la justeza de la relación (1). Por último, supongamos que α es un ángulo del IV

---

*) La propiedad de las funciones trigonométricas que aquí utilizamos se denomina *periodicidad* y será examinada separadamente en el § 112.

cuadrante, es decir, $\alpha = 270° + \beta$, $0 < \beta < 90°$. En tal caso
$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \operatorname{sen}(360° + \beta) = \operatorname{sen}\beta$,
$\cos\alpha = \cos(270° + \beta) = \operatorname{sen}\beta$.

Por lo tanto, también en este caso la fórmula (1) es justa.
De este modo, se ha demostrado la justeza de la fórmula (1) para todos los ángulos.
De un modo análogo se puede verificar la justeza de cualesquiera de las fórmulas de reducción.

§ 110. Dos reglas para memorizar las fórmulas de reducción

1. *Si el argumento (ángulo) de una función trigonométrica reducida tiene la forma* $(180° - \alpha)$, $(180° + \alpha)$, $(360° - \alpha)$, *o, en radianes,* $(\pi - a)$, $(\pi + a)$, $(2\pi - a)$, *la denominación de la función reducida no varía. El signo del segundo miembro de la fórmula de reducción se escribe en función del signo que posee la función reducida en el cuadrante dado.*

E j e m p l o s. 1) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se ha tomado el signo menos puesto que el ángulo de 150° termina en el segundo cuadrante, donde el coseno es negativo.
2) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(180° + 60°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. El ángulo de 240° termina en el III cuadrante, donde la tangente es positiva.
3) $\operatorname{sen} 315° = \operatorname{sen}(360° - 45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
El ángulo de 315° termina en el IV cuadrante, donde el seno es negativo.
4) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Si el argumento de la función trigonométrica reducida tiene la forma* $(90° - \alpha)$, $(90° + \alpha)$, $(270° - \alpha)$, $(270° + \alpha)$, *ó, en radianes,*

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right),\ \left(\frac{\pi}{2} + a\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi - a\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi + a\right),$$

la denominación de la función reducida cambia por la semejante: el seno pasa al coseno y viceversa; la tangente pasa a la cotangente y viceversa; la secante, a la cosecante y viceversa; el signo del segundo miembro de las fórmulas se escribe de acuerdo al signo de la función reducida en el cuadrante dado.

E j e m p l o s. 1) sen $100° = \text{sen}\,(90° + 10°) = \cos 10°$. El ángulo de 100° se encuentra en el segundo cuadrante, donde el seno tiene un valor positivo.

2) $\cos 300° = \cos (270° + 30) = \text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$.

3) $\text{tg}\, 135° = \text{tg}\, (90° + 45°) = -\text{ctg}\, 45° = -1$.

4) $\text{ctg}\, \frac{5\pi}{3} = \text{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\, \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 111. Funciones trigonométricas de argumento numérico

Al estudiar la función del tipo $y = ax^2$ (véase el § 52) se indicó que esta función refleja diferentes fenómenos concretos de nuestra vida, por ejemplo:

1) la ley de caída libre de un cuerpo en el vacío, en tal caso, x es el tiempo, y es el camino recorrido, $a = \frac{g}{2}$;

2) la dependencia entre el área del círculo y el radio; aquí, x es el radio, y es el área, el coeficiente $a = \pi$;

3) la resistencia del medio al movimiento de un cuerpo, $y = kx^2$, donde x es la velocidad, y es la fuerza de resistencia.

En todos estos casos una de las magnitudes variables varió proporcionalmente al cuadrado de la otra. Al estudiar matemáticamente la función $y = ax^2$ nos abstraemos del sentido físico y geométrico de las variables y por las letras x e y sobreentendemos números. Análogamente procedemos al estudiar las funciones trigonométricas. El argumento x se toma como un cierto número, en tal caso,

1) sen 0,5 significa el seno de un ángulo igual a 0,5 rad.

2) cos 1, 2 significa el coseno de un ángulo igual a 1,2 rad.

3) $\text{tg}\,(\cos \pi) = \text{tg}\,(-1) = -\text{tg}\, 1$, donde tg 1 significa la tangente de un ángulo igual a un radian.

● DEFINICION. Se denomina *función trigonométrica* de argumento numérico x la función (homónima) de un ángulo que contiene x rad.

Observación. Para hallar los valores del seno y del coseno de argumento numérico al final del libro se da una tabla. Por ella hallamos:

sen 0,75 = 0,6816,

cos 1,3 = 0,2675.

§ 112. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OM}$ forma en la circunferencia unitaria un ángulo α con el eje Ox (fig. 66). Si al argumento, es decir, al ángulo α sumamos un número entero cualquiera de vueltas, el extremo del vector $\overrightarrow{OM}$ resultará en el punto anterior de la circunferencia, y por tal aumento del argumento en un número entero de vueltas, el valor de las funciones trigonométricas no varía, cualquiera que sea el ángulo inicial α.

● DEFINICION 1. Una función se llama *periódica* si existe un número, distinto de cero, cuya suma a cualquier valor del argumento no varía el valor de la función.

● DEFINICION 2. Se llama *período* de una función*) el menor número positivo, cuya suma a un valor cualquiera del argumento no varía el valor de la función.

Todas las funciones trigonométricas son periódicas, además el período del seno, del coseno, de la secante y la cosecante es igual a 2π, en tanto que para la tangente y la cotangente el período es igual a π (180°), lo que se aprecia de las fórmulas de reducción.

La propiedad de periodicidad de la función $f(x)$ se admite en escribir del siguiente modo:

$$f(x) = f(x + T),$$

donde T es el período de la función (fig. 88).

Con respecto a las funciones trigonométricas, cuyos argumentos designamos por x, la propiedad de periodicidad se escribe así:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Observasión 1. Mediante el siguiente razonamiento se puede comprobar que el período de la función sen x es igual a 2π y no es menor. Supongamos que existe un número l tal que

$$\operatorname{sen}(x + l) = \operatorname{sen} x \qquad (1)$$

*) A veces por «período» se entiende un número positivo *cualquiera*, distinto de cero, cuya suma a un valor cualquiera del argumento no varía el valor de la función. El menor número con tal propiedad se llama período *fundamental*.

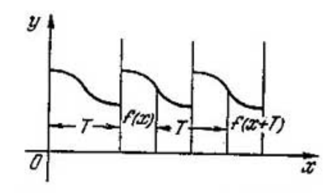


Fig. 88.

para cualquier valor de x. En tal caso, para $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ de la identidad (1) se deduce:

$$\operatorname{sen} l = 0, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = 1,$$

o bien

$$\operatorname{sen} l = 0, \quad \cos l = 1.$$

El menor ángulo positivo l, cuyo seno es igual a cero y el coseno igual a 1, es el ángulo 2π (rad).

Observación 2. El período no sólo se puede sumar al argumento, sino también se le puede restar; además, se puede sumar y restar del argumento cualquier número entero de períodos:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi k) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,$$

donde k es un número entero cualquiera, indistintamente, positivo o negativo.

Ejemplos. 1) $\operatorname{sen}(-330°) = \operatorname{sen}(-330° + 360°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Aquí se sumó al argumento un período.

2) $\operatorname{sen} 765° = \operatorname{sen}(45° + 2 \cdot 360°) = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En este ejemplo se restó del argumento dos períodos.

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3} + 6\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Al argumento negativo $\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ se le sumaron seis períodos (6π), lo que dio lugar al argumento positivo $\frac{\pi}{3}$.

4) $\operatorname{sen} 1200° = \operatorname{sen}(3 \cdot 360° + 120°) = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) $\operatorname{sen}(-5{,}6\pi) = \operatorname{sen}(-5{,}6\pi + 6\pi) = \operatorname{sen} 0{,}4\pi = \cos 0{,}1\pi \approx 0{,}305$.

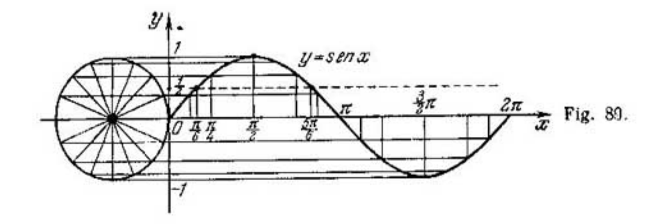


Fig. 89.

§ 113. Curvas de las funciones trigonométricas

1. Curvas de las funciones $y = \text{sen}\, x$ e $y = \cos x$. Representemos gráficamente la variación de la función $y = \text{sen}\, x$ al variar el argumento x desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$, o en radianes, desde 0° hasta 360°. Esto se puede realizar sencillamente del modo siguiente:
Trazamos una circunferencia de radio unitario y la dividimos en 16 partes iguales (fig. 89). A cada división de arco corresponde un ángulo central de 22°30′, o en radianes, $\frac{\pi}{8}$ (rad). Por el eje Ox vamos a llevar los ángulos

$$0, \ \frac{\pi}{8}, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{8}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{8}, \ldots,$$

representándolos en forma de segmentos en la escala elegida. En los puntos de división trazamos perpendiculares al eje Ox y en ellas llevamos los valores del seno de los correspondientes ángulos. Los valores del seno los hallamos por construcción, proyectando los puntos de división de la circunferencia sobre el eje Oy y transportando las proyecciones sobre las correspondientes perpendiculares. Por los extremos de las perpendiculares trazamos una línea suave. La curva obtenida se llama *sinusoide* o *senoide*. Hemos construido sólo una «onda» de la sinusoide, correspondiente a la variación del argumento de 0 a 2π. Debido a la periodicidad de la función sen x, la ulterior variación del argumento x en el intervalo de 2π a 4π da lugar a la formación de la segunda onda de la sinusoide, igual a la primera. Lo mismo ocurrirá si quisiésemos construir la parte de la curva que corresponde a la variación del argumento x desde O hasta -2π. La gráfica refleja la marcha de variación de la función. De la gráfica se establecen fácilmente las propiedades de la función $y = \text{sen}\, x$.

1) La función sen x está definida para cualquier valor real del argumento x, es decir, su campo de definición son todos los números reales, admitidos como medida en radianes del ángulo.
2) Todos los valores de la función sen x colman el segmento $[-1, 1]$, es decir, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$.
3) La función es impar, puesto que sen $(-x) = -$sen x. La curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas.
4) En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función sen x crece, variando desde -1 hasta $+1$; en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la función sen x decrece desde 1 hasta -1.
5) La función alcanza su valor máximo para $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, ..., $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera, positivo, negativo y 0; en estos puntos el seno es igual a 1.
6) El seno adquiere su valor mínimo, igual a -1, para $x = -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 4\pi$, ..., y, en general, para $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
7) La función se anula para $x = \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$, y, en general, para $x = \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
Conociendo la gráfica de la función $y =$ sen x se obtiene fácilmente la gráfica de la función $y = \cos x$. Utilicemos la fórmula

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

que se satisface para cualquier x real. De esta fórmula se deduce que en lugar del valor del coseno en el punto x se puede tomar el valor del seno en el punto $x + \frac{\pi}{2}$, es decir, que la gráfica de la función $y = \cos x$ será una sinusoide, desplazada a lo largo del eje Ox en $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda (véase la fig. 90)*).
De la gráfica establecemos las siguientes propiedades del coseno.
1) La función $\cos x$ está definida en todo el eje numérico, puesto que a cada valor real de x, tomado como medida en

*) Sobre la transformación de la sinusoide véase más detalladamente en el § 138.

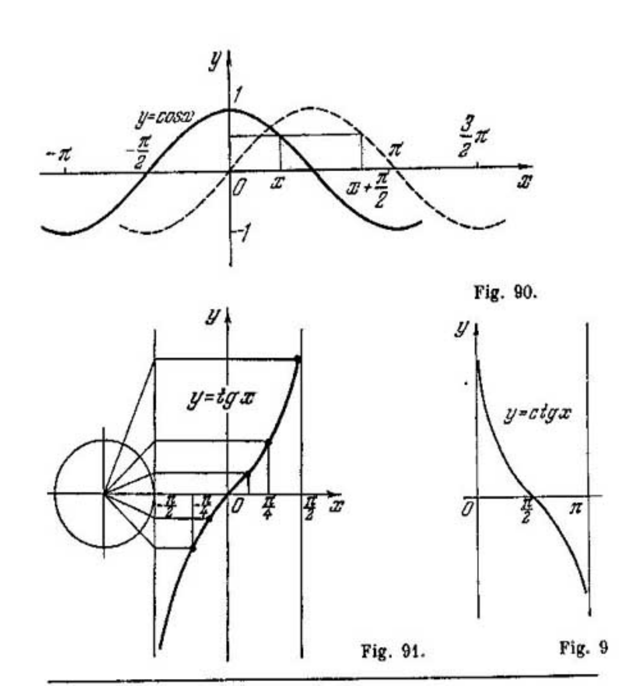


Fig. 90.

Fig. 91.

Fig. 9

radianes del ángulo, corresponde un valor completamente determinado del coseno.

2) El conjunto de valores de la función colma el segmento $[-1, 1]$.

3) $\cos x$ es una función par, puesto que $\cos(-x) = \cos x$; la curva es simétrica con respecto al eje Oy.

4) La función $\cos x$ decrece en el intervalo $(0, \pi)$, variándose desde 1 hasta -1; en el intervalo $(-\pi, 0)$ la función crece desde -1 hasta $+1$.

5) El $\cos x$ alcanza el valor máximo, igual a 1, para $x = 0$, 2π, 4π, ..., $2\pi k$; la función adquiere el valor mínimo, igual a -1, en los puntos π, 3π, 5π, ..., $(2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) La función se anula si el argumento $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Curvas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$. En la fig. 91 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$, construida por el mismo método que la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$. Propiedades de la función $\operatorname{tg} x$:

1) La tangente es una función periódica de período π.

2) La función está definida en todo el eje numérico, con excepción de los puntos $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) $\operatorname{tg} x$ es una función ilimitada, puesto que puede tomar cualquier valor tan grande como se quiera en magnitud absoluta.

4) La función es impar, puesto que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; en la gráfica se aprecia la simetría con respecto al origen de coordenadas.

5) $\operatorname{tg} x$ crece en los intervalos $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

6) La tangente no tiene valores máximo y mínimo.

7) La función se anula para $x = \pi k$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$).

En la fig. 92 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{ctg} x$, que puede ser construida desplazando la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$ hacia la izquierda a lo largo del eje Ox en $\frac{\pi}{2}$ con la aplicación ulterior respecto al eje Ox, de acuerdo a la fórmula

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Constrúyase individualmente esta gráfica y formúlese a base de ella las propiedades de la cotangente.

▲ **Ejercicios**

1. Expresar en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando ellas indican las 2h, 6h, 8h.

2. Hallar la medida en radianes de los ángulos:
1) 2°; 2) 5°; 3) 7°,5; 4) 12°,5; 5) 22°,5; 6) 200°; 7) 320°.

3. Hallar la medida en radianes de los ángulos:
1) 2700°; 2) 7200°; 3) 10 000°.

4. Expresar en grados y minutos las magnitudes de los arcos cuyas medidas en radianes se expresan por números:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) $\frac{\pi}{8}$; 6) $\frac{\pi}{15}$; 7) $\frac{\pi}{10}$.

5. Dos ángulos de un triángulo tienen 59° y 69°. Calcular en radianes la magnitud del tercer ángulo del triángulo.

6. Dos ángulos de un triángulo son de $\frac{3\pi}{10}$ rad y $\frac{2\pi}{15}$ rad.

Calcular de cuántos grados es el tercer ángulo.
7. ¿Cuál es la medida en radianes de los arcos que componen las siguientes partes de una circunferencia: $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{11}{15}$; 1; 1,75; 0,03; 0,005; 0,375?
8. El arco de una circunferencia de radio $R = 6$ cm tiene una longitud de 4,5 cm. ¿Cuál es la medida en radianes de este arco?
9. Utilizando la tabla convertir en radianes los ángulos:
1) 126°; 2) 279°; 3) 118°,40′; 4) 250°20′; 5) 352°10′; 6) 168°15′; 7) 56°18′; 8) 472°50′.
10. Utilizando la tabla convertir en grados los ángulos:
1) 0,4800; 2) 0,6510; 3) 1,2700; 4) 0,6270; 5) 1,3983; 6) 0,0099; 7) 0,5000; 8) 2,6400.
11. Hallar la longitud del arco de circunferencia si su radio es de 22,5 cm y su ángulo central, de 40°30′.
12. El arco de circunferencia es de 200°. Determinar el radio de la circunferencia si la longitud del arco es de 50 cm.
13. Hallar el perímetro y el área del sector de círculo, cuyo radio es de 15 cm, si el arco tiene 54°.
14. Calcular el área del segmento circular limitado por un arco de 45°44′, sabiendo que el radio de la circunferencia es de 47,34 m.
15. Una rueda dentada tiene 90 dientes. Expresar en radianes el ángulo de rotación de la rueda cuando ella gira: 1) 30 dientes; 2) 25 dientes; 3) 40 dientes; 4) 200 dientes.
16. ¿Cuál es la velocidad angular de un disco que gira a 300 r.p.m.?
17. La velocidad angular de un árbol es de $42{,}3\ \frac{1}{s}$. Determinar su número de revoluciones por minuto.
18. Por construcción y medición directa en el círculo unitario ($R = 1$) hallar las siguientes magnitudes:
1) sen 120°; 2) ctg 60°; 3) cos 75°; 4) tg 250°; 5) sen 225°; 6) cos 160°.
19. (Verbalmente). ¿Puede tener la función $\cos x$ en magnitud absoluta un valor mayor que la unidad?
20. (Verbalmente). ¿En qué cuadrantes $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen signos iguales?
21. Demostrar la desigualdad

$\operatorname{sen} x + \cos x > 1;\ 0 < x < 90°$.

22. Determinar los signos de las siguientes expresiones:

1) sen 285°; 2) ctg 252°30′; 3) cos 135°; 4) tg 327°20′.

23. Construir el menor ángulo positivo según el valor dado de la función trigonométrica y expresar el ángulo en radianes:

1) $\operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$; 2) $\cos x = -0{,}6$; 3) $\operatorname{tg} x = 1{,}2$; 4) $\operatorname{sen} x = -0{,}7$;

5) $\operatorname{tg} x = -0{,}6$.

24. ¿En qué límites puede variar el argumento x para que se cumplan las siguientes desigualdades ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$):

1) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \geqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} x \leqslant 0$; 3) $\cos x - \frac{1}{2} \leqslant 0$;

4) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geqslant 0$; 5) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 \leqslant 0$; 6) $\operatorname{ctg} x + 1 \geqslant 0$?

25. Por el valor dado de una de las funciones trigonométricas calcular valores de las tres funciones restantes:

1) $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}6\ \left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \left(\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\ (90°<\alpha<180°)$.

26. Simplificar las expresiones

1) $5\operatorname{sen}270°-2\cos 0°+3\operatorname{tg}0°$, 2) $a\operatorname{sen}\pi+b\cos\pi+\operatorname{tg}\pi$.

3) $m\cos\frac{\pi}{2}-n\cos\frac{3}{2}\pi+p\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$. 4) $2\operatorname{tg}0°+8\cos 270°-$
$-6\operatorname{sen}270°$.

27. Reducir las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos a las correspondientes funciones de ángulos agudos:

1) $\operatorname{sen}165°$; 2) $\cos 210°$; 3) $\operatorname{tg}135°$; 4) $\operatorname{ctg}240°$; 5) $\cos 315°$

6) $\operatorname{tg}200°$; 7) $\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$; 8) $\cos\frac{5}{3}\pi$; 9) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi$; 10) $\operatorname{ctg}\frac{8}{5}\pi$.

28. Reducir las funciones trigonométricas de argumento negativo a funciones de argumento positivo:

1) $\operatorname{sen}(-300°)$; 2) $\cos(-400°)$; 3) $\operatorname{tg}(-960°)$; 4) $\operatorname{ctg}(-3{,}2\pi)$.
5) $\operatorname{sen}(-5{,}4\pi)$; 6) $\operatorname{tg}(-2{,}3\pi)$; 7) $\cos(-1250°)$; 8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3\pi)$.

29. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\operatorname{ctg}675°\operatorname{cosec}280°-\operatorname{tg}1845°\operatorname{sen}460°$;
2) $\cos x\operatorname{tg}(180°+x)\operatorname{tg}(270°-x)\operatorname{cosec}(90°-x)$;

3) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{ctg}(\pi-x)}$; 4) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}$,

5) $\operatorname{sen}0{,}6\pi+\cos^2(-1{,}1\pi)\operatorname{sen}1{,}6\pi$;
6) $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\operatorname{sen}5{,}6\pi\operatorname{ctg}4{,}4\pi$;

7) $\operatorname{sen}(A-\pi)\cos(A-2\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-A\right)\operatorname{cosec}(5{,}5\pi+A)$;

8) $\left[\operatorname{sen}^2(5\pi+0{,}5)+\operatorname{sen}^2\left(0{,}5-\frac{3}{2}\pi\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}-\pi\right)$;

9) $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{5}{14}\pi-\cos\frac{\pi}{7}\right)$;

10) $\operatorname{sen}170°\cos 280°-\operatorname{sen}260°\cos 10°-\dfrac{1+\operatorname{sen}100°\cos 170°}{1+\operatorname{sen}350°\operatorname{sen}180°}$;

11) $\operatorname{tg}(90°+B)+\operatorname{ctg}(270°-B)-\operatorname{tg}(180°-B)+\operatorname{ctg}B$;
12) $\operatorname{ctg}(x-90°)[\operatorname{sen}(x-270°)-\operatorname{sen}(180°-x)]$.

30. Demostrar la justeza de las siguientes igualdades:

1) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$;

4) $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha=1$;
5) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

7) $\operatorname{sen}(A-30^\circ)+\operatorname{sen}(A+150^\circ)=0$;

8) $\cos(B-100^\circ)=-\operatorname{sen}(170^\circ+B)$;

9) $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}}=2\sec\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

10) $\operatorname{sen}\alpha\,(2\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha$;

11) $1+\dfrac{\cos x\operatorname{tg}^2 x}{1+\cos x}=\sec x$;

12) $2(\operatorname{sen}^6 A+\cos^6 A)-3(\operatorname{sen}^4 A+\cos^4 A)+1=0$;

13) $(\operatorname{sen} y+\operatorname{cosec} y)^2+(\cos y+\sec y)^2-(\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 y)=7$;

14) $\operatorname{sen}^6 A+\cos^6 A+3\operatorname{sen}^2 A\cos^2 A=1$.

31. Partiendo de la representación intuitiva sobre las variaciones de las funciones trigonométricas en los límites de la primera circunferencia $(0\leqslant x<2\pi)$, resolver las siguientes desigualdades utilizando el círculo trigonométrico $(r=1)$:

1) $\operatorname{sen} x>0$; 2) $\cos x\leqslant 0$; 3) $\operatorname{sen} 2x<0$; 4) $\cos 3x>0$;

5) $\operatorname{tg} x>\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{sen} x\geqslant\dfrac{1}{2}$; 7) $\cos 2x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $0<\operatorname{sen} x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1$; 10) $0<\operatorname{tg} x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 11) $0<\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{1}{2}$;

12) $|\operatorname{sen} x|<\dfrac{1}{2}$; 13) $\dfrac{1}{2}<\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)<1$; 14) $|\cos 2x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CAPITULO X

TRANSFORMACIONES DE EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS

§ 114. Seno y coseno de la suma (resta) de dos ángulos

En el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas xOy trazamos el rayo ON formando un ángulo α con el eje Ox, y el rayo OP, formando un ángulo β con el rayo ON (fig. 93).

Sobre el rayo OP construimos el vector unitario $\overrightarrow{OM}$; desde el punto M bajamos la perpendicular MM_1 sobre el rayo ON. En tal caso,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}. \qquad (1)$$

Si

$$\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, \ y_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x_2, \ y_2\},$$

entonces

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1 + x_2, \ y_1 + y_2\},$$

lo que se deduce de la igualdad (1) por el teorema del § 90. Por eso

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{x_1 + x_2}{|\overrightarrow{OM}|} = x_1 + x_2. \qquad (2)$$

Pero,

$$x_1 = |\overrightarrow{OM_1}| \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$x_2 = |\overrightarrow{M_1M}| \cos(90^\circ + \alpha) = -|\overrightarrow{M_1M}| \operatorname{sen}\alpha.$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha + \beta) = |\overrightarrow{OM_1}| \cos\alpha - |\overrightarrow{M_1M}| \operatorname{sen}\alpha. \qquad (4)$$

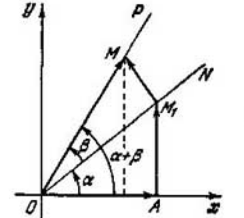


Fig. 93.

Sin embargo, puesto que $|\overrightarrow{OM_1}| = 1 \cdot \cos\beta$, $|\overrightarrow{M_1M}| = 1 \cdot \operatorname{sen}\beta$, finalmente tendremos:

(I) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

El coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de estos ángulos menos el producto de los senos de los mismos ángulos.

Ejemplo. $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \cdot \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$.

Hallamos la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{y_1+y_2}{|\overrightarrow{OM}|} = y_1 + y_2, \tag{5}$$

pero, $y_1 = |\overrightarrow{OM_1}| \operatorname{sen}\alpha$, $y_2 = |\overrightarrow{M_1M}| \operatorname{sen}(90° + \alpha) = |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha$, y por eso

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = |\overrightarrow{OM_1}| \operatorname{sen}\alpha + |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha. \tag{6}$$

Sustituyendo en la igualdad (6) $|\overrightarrow{OM_1}|$ por $\cos\beta$ y $|\overrightarrow{M_1M}|$ por $\operatorname{sen}\beta$, finalmente tendremos:

(II) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

El seno de la suma de dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo más el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.

Ejemplo. Dados: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, donde α es del

segundo cuadrante, β es un ángulo agudo; hallar sen (α + β). Tenemos que

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4};$$

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Por eso,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{3-2\sqrt{14}}{12}.$$

Observación. Las fórmulas (I) y (II) se satisfacen para todos los valores de los ángulos α y β, puesto que se basan en los dos teoremas de proyecciones de un vector y de la suma vectorial sobre un eje; estos teoremas se cumplen para cualquier disposición de los vectores con respecto al eje. La diferencia de dos ángulos se puede representar en forma de suma:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

y por eso,

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \times$$
$$\times \operatorname{sen}(-\beta);$$

(III) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$

El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de ambos ángulos más el producto de sus senos.

Ejemplo.

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ + \operatorname{sen}45^\circ \times$$
$$\times \operatorname{sen}30^\circ,$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966.$$

De un modo análogo se puede obtener la fórmula para el seno de la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta) +$$
$$+ \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta),$$

(IV) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$

El seno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo menos el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.

Ejemplo.

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588.$$

§ 115. Producto escalar de dos vectores expresados por sus coordenadas

Corrientemente los vectores se dan mediante sus coordenadas (o por las proyecciones sobre un eje, lo que es lo mismo). Por eso, es práctico expresar el producto escalar de dos vectores por sus coordenadas.

Supongamos que el vector $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ forma con el eje Ox el ángulo φ_1, el vector $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2\}$ forma con el eje Ox el ángulo φ_2 (fig. 94). En tal caso el ángulo φ entre los vectores es igual a la diferencia $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Por definición de producto escalar tenemos:

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = r_1 r_2 \cos \varphi = r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Escribamos la igualdad (1) en la forma

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) =$$
$$= r_1 \cos \varphi_1 \cdot r_2 \cos \varphi_2 + r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cdot r_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \qquad (2)$$

De la defínción de las funciones trigonométricas se deduce que $r_1 \cos \varphi_1 = x_1$; $r_2 \cos \varphi_2 = x_2$; $r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = y_1$; $r_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = y_2$, de donde $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

El producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus coordenadas homónimas.

Ejemplo 1. Calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, si A (2; 5), B (4; 3), C (−5; −1) y D (−1; 2).

Hallemos las coordenadas de cada vector:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\}; \overrightarrow{AB} = \{2; -2\}; \overrightarrow{CD} = \{4, 3\};$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 = 2.$$

Ejemplo 2. Determinar la coordenada y del vector $\boldsymbol{a} = \{3, y\}$ de manera que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} = \{4, -2\}$, sean perpendiculares.

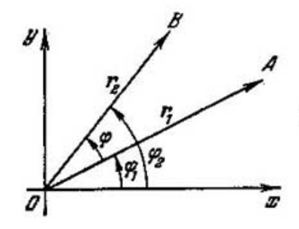


Fig. 94.

Puesto que $a \perp b$, entonces $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, y por eso el producto escalar se hace igual a cero,

$a \cdot b = 3 \cdot 4 + y(-2) = 0.$

Por lo tanto,

$y = 6.$

Observación. En este ejemplo se utilizó la siguiente importante propiedad del producto escalar: de la perpendicularidad de los vectores a y b se deduce que $a \cdot b = 0$. También es cierto lo recíproco: cuando el producto escalar se hace nulo se deduce, que $a \perp b$, si ninguno de los vectores a o b es un vector nulo.

§ 116. La tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos

Examinemos la tangente de un ángulo cualquiera como cociente del seno de ese ángulo por su coseno:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

La tangente de la suma de dos ángulos es igual a una fracción, cuyo numerador es la suma de las tangentes, y el denominador, la diferencia entre la unidad y el producto de las tangentes de estos ángulos.

Ejemplo. Dados $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, α y β son ángulos agudos, hallar $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Tenemos que:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Por lo tanto, $\alpha+\beta=45°$.
Sustituyendo en la fórmula (V) en ángulo β por $-\beta$, obtenemos

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\text{(II)}\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

La tangente de la diferencia de dos ángulos es igual a una fracción, cuyo numerador es la diferencia de las tangentes, y el denominador, la suma de la unidad y el producto de las tangentes de estos dos ángulos.

Ejemplo,

$$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}(45°-30°)=\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°}=$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=$$

$$=2-\sqrt{3}\approx 0,2679.$$

Observación. No hay necesidad de deducir y memorizar la fórmula de la cotangente de la suma y la diferencia de dos ángulos; para ello es suficiente servirse de que

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)}.$$

§ 117. Funciones trigonométricas de argumento doble

Veamos el caso particular de la fórmula de adición:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

para $\beta=\alpha$; en tal caso tendremos

$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,$

o bien

(I) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$.

El seno de un ángulo doble es igual al producto doblado del seno del ángulo dado por su coseno.

Ejemplo. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Hallar $\operatorname{sen} 2\alpha$.

$$\operatorname{sen} 2\alpha \,|_{\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}} = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \,|_{\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}} =$$

$$= 2\cdot \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{4}{9}},$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot \frac{2}{3}\cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{5}.$$

A continuación, de la fórmula

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
para $\alpha = \beta$ se deduce que
(II) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.

El coseno de un ángulo doble es igual al cuadrado del coseno del ángulo dado menos el cuadrado de su seno.

Ejemplo. 1. $\cos 120° = \cos^2 60° - \operatorname{sen}^2 60° = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$
$= -\frac{1}{2}$. De esto nos persuadimos también así:

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2 Dado $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < 90°$;
hallar $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha \,|_{\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \,|_{\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}} = 1 - 2\cdot\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Si en la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

ponemos $\beta = \alpha$, obtendremos

(III) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ $(\operatorname{tg}\alpha \neq \pm 1)$.

La tangente de un ángulo doble es igual a la tangente doblada del ángulo dado dividido por la diferencia entre la unidad y el cuadrado de la tangente de dicho ángulo.

Ejemplo. Dado $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, hallar $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha \Big|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\Big|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}}=\frac{3}{1-\frac{9}{4}}=-\frac{12}{5}.$$

Observación. Todo ángulo es el doble con respecto a la mitad de dicho ángulo, como, por ejemplo, α lo es con respecto a $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ lo es con respecto a $\frac{\alpha}{4}$, 5α lo es con respecto a $\frac{5\alpha}{2}$, $(\alpha+\beta)$ lo es con respecto a $\frac{\alpha+\beta}{2}$ etc.

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen} 3x=2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$,

2) $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$,

3) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{16}}$.

§ 118. Funciones trigonométricas de argumento medio

Vamos a partir de las siguientes dos identidades

$$\left.\begin{aligned}1&=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},\\ \cos\alpha&=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Sumando miembro a miembro estas dos identidades, y, luego restando de la primera la segunda, obtenemos:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\qquad(2)$$

$$1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.\qquad(3)$$

De la fórmula (2) hallamos que $\cos\frac{\alpha}{2}$, y de la fórmula (3), $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$:

(I) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$,

(II) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Dividimos miembro a miembro la igualdad (II) por la (I):

(III) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Las fórmulas (I), (II) y (III) expresan el coseno, el seno y la tangente del ángulo medio por el coseno de un ángulo entero.

Si se sabe en que cuadrante termina el ángulo $\frac{\alpha}{2}$, ante el radical se toma el correspondiente signo, en caso contrario se conserva el signo doble.

Ejemplo. 1. Calcular sin las tablas $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$. El ángulo $\frac{\pi}{8}$ es la mitad del ángulo $\frac{\pi}{4}$, además $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por eso

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$\frac{\pi}{8}$ es un ángulo agudo, por eso ante el radical se ha tomado el signo más.

Ejemplo. 2. Dado $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, calcular el $\cos\frac{\alpha}{2}$. Al principio hallamos $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{9}},$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}$$

(se ha tomado el signo menos porque el ángulo α termina en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo);

el semiángulo $\frac{\alpha}{2}$ termina en el segundo cuadrante, por eso

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\Bigg|_{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{6}} \approx -0,1691.$$

Ejemplo 3. Calcular tg 15°.
Utilizamos la fórmula (III), considerando el ángulo de 15° como la mitad del ángulo de 30°:

$$\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}.$$

Para la tangente del ángulo medio en lugar de la fórmula (III) se pueden deducir otras dos, más convenientes para calcular y que no contienen radicales:

$$\text{(III}') \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

o bien

$$\text{(III}'') \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Conviene hacer notar que $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ tienen el mismo signo.

Ejemplo.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}414.$$

§ 119. Expresión del seno y del coseno por la tangente del semiángulo

Al demostrar las identidades trigonométricas y al resolver las ecuaciones trigonométricas, al igual que en otros casos, son bastante convenientes las fórmulas que expresan el $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(I)}\quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

El seno de un ángulo es igual a la tangente doblada de la mitad de este ángulo dividida por la suma de la unidad y el cuadrado de la tangente del semiángulo.

Ejemplo. Calcular $\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$:

$$\operatorname{sen}\alpha=\left.\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right|_{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2}=\frac{2\cdot 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}.$$

Análogamente expresamos el $\cos\alpha$ por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(II)}\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dividiendo miembro a miembro la igualdad (I) por la (II) hallamos:

$$\text{(III)}\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Las fórmulas (I), (II), (III) son interesantes, pues sus segundos miembros no tienen radicales, por eso se dice que el seno, el coseno y la tangente se expresan racionalmente por la tangente del semiángulo; los valores de las otras tres funciones trigonométricas, la cotangente, la secante y la cosecante, son de magnitud inversa a los valores de la tangente, el coseno y el seno respectivamente, y, por eso, también se expresan racionalmente por la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ejemplo. Dada la $\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, hallar el sen $4x$. En primer lugar hallamos sen $2x$ y $\cos 2x$:

$$\operatorname{sen}2x=\left.\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right|_{\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}}=\frac{3}{1+\frac{9}{4}}=\frac{12}{13};$$

$$\cos 2x=\left.\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right|_{\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}}=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}=-\frac{5}{13}.$$

El ángulo $4x$ es doble con respecto al ángulo $2x$, y por eso, $\operatorname{sen}4x=2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x$.
Sustituyendo en esta igualdad sen $2x$ y $\cos 2x$ por sus valores, obtendremos

$$\operatorname{sen}4x=2\cdot\frac{12}{13}\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}.$$

§ 120. Ejemplos de demostración de identidades

E j e m p l o 1. Demostrar que

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Reducimos el segundo miembro al primero

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

E j e m p l o 2. Demostrar la identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Reducimos el primer miembro al segundo

$$\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

§ 121. Transformaciones de la suma y de la diferencia de las funciones trigonométricas en producto y transformaciones inversas

1. Transformación de la suma y de la diferencia de dos senos:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1), y luego restando de la primera la segunda, obtendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta,\quad(2)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha.\quad(3)$$

Ponemos:

$$\alpha+\beta=x,\ \alpha-\beta=y.\quad(4)$$

Sumando miembro a miembro y después restando las igualdades (4), tendremos que

$$\alpha=\frac{x+y}{2},\quad \beta=\frac{x-y}{2}. \qquad (5)$$

En las nuevas designaciones las igualdades (2) y (3) finalmente toman la forma

$$\text{(I)}\quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\text{(II)}\quad \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

La igualdad (I) corrientemente se formula así: *la suma de los senos de dos ángulos es igual al producto doblado del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia de estos ángulos.*

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen} 40^\circ+\operatorname{sen} 50^\circ=2\operatorname{sen}\frac{40^\circ+50^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-50^\circ}{2}=$

$=2\operatorname{sen} 45^\circ\cdot\cos 5^\circ=\sqrt{2}\cos 5^\circ;$

2) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}+\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{8}+2x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\times$

$\times\frac{\frac{\pi}{8}-2x+\frac{\pi}{4}}{2}=2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{3\pi}{16}\right).$

Análogamente se lee la fórmula (II): *la diferencia de los senos de dos ángulos es igual al producto doblado del seno de la semidiferencia por el coseno de la semisuma de estos ángulos.*

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen} 75^\circ-\operatorname{sen} 15^\circ=2\operatorname{sen}\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=$

$=2\operatorname{sen} 30^\circ\cdot\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2};$

2) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=2\operatorname{sen}\frac{x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{2\pi}{3}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{2\pi}{3}}{2}=$

$=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$

2. Transformación de la suma y de la diferencia de dos cosenos. Tenemos

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Sumando y restando las igualdades (6), obtendremos:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta,\qquad(7)$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,\qquad(8)$$

o en las notaciones (5)

$$\text{(III)}\quad \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\text{(IV)}\quad \cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}.$$

La suma de los cosenos de dos ángulos es igual al producto doblado del coseno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia de estos ángulos.

De manera semejante se puede leer también la fórmula (IV).

E j e m p l o s.

1) $\cos 35^\circ+\cos 25^\circ=2\cos\dfrac{25^\circ+35^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{35^\circ-25^\circ}{2}=$

$=2\cos 30^\circ\cdot\cos 5^\circ=\sqrt{3}\cdot\cos 5^\circ;$

2) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=-2\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right).$

3. Transformación de la suma y de la diferencia de dos tangentes. Si $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, tendremos:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\operatorname{sen}y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

De un modo semejante se puede transformar la diferencia:

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

E j e m p l o.

$$\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\operatorname{sen}(75^\circ-15^\circ)}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\operatorname{sen}60^\circ}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\operatorname{sen}15^\circ\cos 15^\circ}=2\sqrt{3}.$$

4. Transformación del producto en una suma algebraica. Cada una de las igualdades (2), (3), (7) y (8) se puede leer tanto de izquierda a derecha como en sentido contrario. Cada miembro de estas igualdades lo dividimos previamente por 2, y luego los escribimos en el orden inverso, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta).$$

§ 122. Introducción de un ángulo auxiliar

Frecuentemente al transformar expresiones trigonométricas se utiliza lo que se denomina método de introducción de un ángulo auxiliar.

E j e m p l o 1. Transformar en producto $1+2\cos\alpha$. Sacamos el factor 2 fuera de paréntesis:

$$1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=$$
$$=4\cdot\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}=4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

E j e m p l o 2. Transformar en producto $1-3\operatorname{tg}^2 x$:

$$1-3\operatorname{tg}^2 x=3\left(\frac{1}{3}-\operatorname{tg}^2 x\right)=3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^2 x\right)=$$
$$=3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}x\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}x\right)=4\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}.$$

E j e m p l o 3. Transformar $\sqrt{a^2+b^2}$ en producto mediante un ángulo auxiliar. Sacamos el factor a fuera de la radical:

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}=|a|\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=$$
$$=|a|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=|a\sec\varphi|,$$

donde $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

E j e m p l o 4. Hallar el valor máximo de la suma $\operatorname{sen} x+\cos x$:

$$\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x+\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos 45^{\circ} \cdot \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 45^{\circ} \cdot \cos x\right)=\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x+45^{\circ}\right).$$

Puesto que el valor máximo, que puede adquirir $\operatorname{sen}(x+45^{\circ})$, es igual a la unidad, tendremos que el valor máximo de la suma de $\operatorname{sen} x+\cos x$ es igual a $\sqrt{2}$.

§ 123. Ejemplos de transformación de expresiones trigonométricas

En este párrafo se dan ejemplos de transformaciones trigonométricas más complejas.

E j e m p l o 1. Transformar en producto

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x+\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x.$$

Utilizamos la identidad

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B=\frac{1}{2}[\cos (A-B)-\cos (A+B)];$$

en tal caso

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x),$$

$$\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 7x),$$

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x).$$

La suma inicial toma la forma

$$\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x+\cos x-\cos 7x-\cos x+\cos 3x)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)-\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos 9x)=$$

$$=\cos 2x \cos x-\cos 8x \cos x=\cos x(\cos 2x-\cos 8x)=$$

$$=\cos x\, 2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x=2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x \cos x.$$

E j e m p l o 2. Demostrar la identidad

$$4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}\left(60^{\circ}-\alpha\right) \operatorname{sen}\left(60^{\circ}+\alpha\right)=\operatorname{sen} 3 \alpha.$$

Reducimos el primer miembro al segundo mediante la trans-

formación del producto de dos senos en una diferencia de cosenos:

$$4\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(60^\circ-\alpha)\cdot\text{sen}\,(60^\circ+\alpha)=$$
$$=2\text{sen}\,\alpha\cdot 2\text{sen}\,(60^\circ-\alpha)\cdot\text{sen}\,(60^\circ+\alpha)=$$
$$=2\text{sen}\,\alpha\,(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)=2\text{sen}\,\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=2\text{sen}\,\alpha\cos 2\alpha+\text{sen}\,\alpha=\text{sen}\,3\alpha-\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha=$$
$$=\text{sen}\,3\alpha.$$

Ejemplo 3. Demostrar que

$$(1+\text{tg}\,\alpha)(1+\text{tg}\,\beta)=2,\quad \text{si}\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

Expresemos el ángulo β por α: $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$; en tal caso $\text{tg}\,\beta=\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha}$. El primer miembro de la igualdad toma la forma

$$(1+\text{tg}\,\alpha)\left(1+\frac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha}\right)=(1+\text{tg}\,\alpha)\cdot\frac{2}{1+\text{tg}\,\alpha}=2.$$

Ejemplo 4. Demostrar que

$$\text{sen}^2\alpha=\text{sen}\,\beta\,(\text{sen}\,\gamma+\text{sen}\,\beta),\ \text{si}\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\ \text{y}\ \alpha=2\beta.$$

Transformemos el segundo miembro y reduzcámoslo al primero, teniendo en cuenta que $\beta=\frac{\alpha}{2}$. En tal caso

$$\text{sen}\,\beta\,(\text{sen}\,\gamma+\text{sen}\,\beta)=\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\left[\text{sen}\left(\pi-\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)+\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right]=$$
$$=\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cdot 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\underbrace{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\text{sen}\,\alpha}\cdot\text{sen}\,\alpha=\text{sen}^2\alpha.$$

§ 124. Ecuaciones trigonométricas elementales

● DEFINICIÓN 1. Una ecuación se llama *trigonométrica* si ella contiene la incógnita sólo bajo los signos de las funciones trigonométricas.

Ejemplos. 1) $\text{sen}^2 x+\cos x-1=0$;
2) $\text{tg}\,x+\text{ctg}\,2x=0$;
3) $\cos 3x+\text{sen}\,x=0$.

La ecuación $\text{tg}\,x-2x+1=0$ no se puede llamar trigonométrica. En ésta la incógnita x se encuentra no sólo bajo el signo de tangente, sino también sin el signo de función tri-

gonométrica. Estas ecuaciones por ahora no las estudiaremos.

DEFINICION 2. *Resolver* una ecuación trigonométrica significa hallar todos los ángulos que satisfacen dicha ecuación, es decir, que reducen la ecuación a una igualdad después de la sustitución de la incógnita.

Así, por ejemplo, la ecuación

$$\text{sen } x - \cos x = 0$$

tiene la raíz $x = \frac{\pi}{4}$, pero tiene también un conjunto inumerable de otras raíces; todas ellas están contenidas en la fórmula

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

donde k es un número entero cualquiera, positivo, negativo y 0, es decir, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Resolvamos en primer lugar 8 ecuaciones elementales que se encuentran con frecuencia

1) $\text{sen } x = 0$.

Puesto que $\text{sen } 0° = 0$, $\text{sen } 180° = 0$, $\text{sen } 360° = 0$, $\text{sen } 540° = 0$, etc., así como $\text{sen } (-180°) = 0$, $\text{sen } (-360°) = 0$, $\text{sen } (-540°) = 0$, etc., tendremos que los ángulos $\ldots -540°, -360°, -180°, 0°, 180°, 360°, 540°, \ldots$ son soluciones de la ecuación $\text{sen } x = 0$. Todos estos ángulos se pueden escribir en la forma

$x = 180° k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

o en radianes $x = \pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

Si se ha dado la ecuación

$$\text{sen } x \cos x = 0,$$

ésta se puede resolver así: multiplicando ambos miembros por 2, obtendremos

$2 \text{ sen } x \cos x = 0$, ó $\text{sen } 2x = 0$,

de donde $2x = \pi k$, y $x = \frac{\pi k}{2}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\text{tg } x = 0$.

Puesto que $\text{tg } x = 0$ y $\text{sen } x = 0$ para iguales valores de x, tendremos que $\text{tg } x = 0$ para $x = 180° k$ $(x = \pi k)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) $\cos x = 0$.

Puesto que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$,

$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{2}=0$, $\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$, etc.,

así como $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=$

$=0$, tendremos que los ángulos

$$\ldots -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ \ldots$$

son soluciones de dicha ecuación. Todos estos ángulos están contenidos en la fórmula

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Si se ha dado la ecuación $\operatorname{tg}^2 x=1$, la resolvemos del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}^2 x-1=0;\quad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-1=0;\quad \frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}=0;$$

$$\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=0;\quad \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=0.$$

La fracción se hace cero cuando su numerador es nulo, a condición de que el denominador sea distinto de cero. En este ejemplo $\cos x \neq 0$ (en caso contrario no existiría la $\operatorname{tg} x$). De este modo,

$\cos 2x = 0.$

De aquí $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, y $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

4) $\operatorname{ctg} x = 0.$

Puesto que $\operatorname{ctg} x = 0$ y $\cos x = 0$ para iguales valores de x, tendremos que $\operatorname{ctg} x = 0$ si $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

5) $\operatorname{sen} x = 1$

Puesto que $\operatorname{sen} 90° = 1$, $\operatorname{sen}(90° \pm 360°) = 1$, $\operatorname{sen}(90° \pm 2\cdot 360°) = 1$, $\operatorname{sen}(90° \pm 3\cdot 360°) = 1, \ldots$, $\operatorname{sen}(90° + k\cdot 360°) = 1$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, tendremos que los ángulos $x = 90° + 360° k$ $\left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ son las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 1$. Si se ha dado la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x \cos 3x = \frac{1}{2},$$

la podemos resolver del siguiente modo:

$2\operatorname{sen} 3x \cos 3x = 1$, ó $\operatorname{sen} 6x = 1$,

de donde $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, y $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

6) $\operatorname{sen} x = -1$.

Puesto que $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = -1$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = -1$, ..., $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$, tendremos que $\operatorname{sen} x = -1$ para $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7) $\cos x = 1$.

Puesto que $\cos 0^\circ = 1$, $\cos(\pm 360^\circ) = 1$, $\cos(\pm 2 \cdot 360^\circ) = 1$, $\cos(\pm 3 \cdot 360^\circ) = 1$, ..., $\cos(\pm n \cdot 360^\circ) = 1$, tendremos que $\cos x = 1$, cuando $x = 360^\circ k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

8) $\cos x = -1$.

Puesto que $\cos(\pm\pi) = -1$, $\cos(\pm\pi + 2\pi) = -1$, ..., ..., $\cos(\pm\pi + 2k\pi) = -1$, tendremos que las soluciones de la ecuación $\cos x = -1$ tiene la forma $x = \pi + 2\pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Examinemos algunos ejemplos más de ecuaciones trigonométricas elementales, en los cuales los argumentos de las funciones trigonométricas tienen una forma más compleja que la de los ejemplos 1) — 8).

a) $\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Utilizando la resolución del ejemplo 8) se puede escribir:

$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} = \pi(2k + 1)$,

de donde

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(2k + 1)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

b) $\operatorname{sen}\left(75^\circ - \frac{x}{2}\right) = -1$.

Debido a la imparidad de la función $\operatorname{sen} x$ se puede cambiar el signo del argumento y de la función, es decir, en lugar de la ecuación dada, resolver la ecuación equivalente a ella

$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - 75^\circ\right) = 1$.

Siguiendo la resolución del ejemplo 5), obtendremos:

$$\frac{x}{2}-75^\circ=90^\circ+360^\circ\cdot k,$$

de donde

$x=330^\circ+360^\circ\cdot 2k$, donde $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

c) $\operatorname{sen}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=0.$

Utilizando la resolución del ejemplo 1), se puede escribir:

$$3x-\frac{\pi}{8}=\pi k,$$

de donde

$x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}k$, donde $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

En general el hallazgo de las soluciones de casi toda ecuación trigonométrica, al fin de cuentas, se reduce a hallar las soluciones de las ecuaciones elementales de tipo:

1) $\operatorname{sen} x=m$ ó $\operatorname{sen} kx=m$, $|m|\leqslant 1$;
2) $\cos x=m$ ó $\cos kx=m$, $|m|\leqslant 1$;
3) $\operatorname{tg} x=m$ ó $\operatorname{tg} kx=m$, m es un número cualquiera.

§ 125. Tipo general de ángulos correspondientes al valor dado de la función trigonométrica

Ejemplo 1. $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$.

Un ángulo elemental cuyo seno es igual a $\frac{1}{2}$ es el ángulo $\frac{\pi}{6}$ (ó de 30°); además, en el segundo cuadrante hay otro ángulo cuyo seno tiene el mismo valor: $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Todos los demás ángulos se hallan sumando a éstos un número entero cualquiera de períodos; obtendremos dos tipos de ángulos:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi, \qquad (1)$$

$$x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi k=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1),$$

$$x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1). \qquad (2)$$

Señalemos que para todo entero k el número $2k$ es par, y el número $(2k+1)$ es impar. Los ángulos, determinados por la fórmula (1), son iguales al ángulo elemental $\frac{\pi}{6}$ más el

ángulo π, tomado un número par de veces. Los ángulos, que entran en la fórmula (2), están formados por ángulo π tomado un número impar de veces menos el ángulo elemental. La fórmula

$$x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n \qquad (3)$$

contiene en sí ambos tipos de ángulos, es decir, une las dos fórmulas anteriores en una, puesto que cuando $n=2k$, obtendremos

$$x=(-1)^{2k}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi\cdot 2k=\frac{\pi}{6}+2\pi k,$$

que son los ángulos dados por la fórmula (1); para $n=2k+1$ tendremos

$$x=(-1)^{2k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)$$

que son los ángulos contenidos en la fórmula (2).

Ejemplo 2. $\operatorname{sen} 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

El menor ángulo positivo que satisface la ecuación es $\frac{\pi}{3}$, por eso

$$2x=\frac{\pi}{3}\cdot(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; de donde

$$x=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+\frac{\pi}{2}k.$$

Ejemplo 3. $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Para el valor negativo dado del seno tomamos el ángulo elemental $-\frac{\pi}{4}$; todos los ángulos están contenidos en la fórmula

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de donde

$$x=-\frac{\pi}{2}(-1)^k+2\pi k=\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}+2\pi k.$$

Ejemplo 4. $\operatorname{sen} px=0$ $(p\neq 0)$.
El ángulo elemental es 0. Por eso,

$$px=\pi k, \text{ ó } x=\frac{\pi k}{p} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplo 5. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
El menor ángulo positivo que satisface la ecuación dada es $\frac{\pi}{4}$. Puesto que el coseno es una función par, tendremos que el ángulo $-\frac{\pi}{4}$ también es una solución de dicha acuación; todos los ángulos rectantes se obtienen sumando a estos dos ángulos fundamentales un número entero cualquiera de períodos. Obtendremos la fórmula general

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplo 6. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.

El menor ángulo positivo es igual a $\frac{2\pi}{3}$, y por eso,

$$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Ejemplo 7. $\cos 3x=0$.
El coseno se hace nulo si el argumento $3x$ es igual a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc. La forma general de tales ángulos es

$$\frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Por lo tanto,

$$3x=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad x=\frac{\pi}{6}(2k+1).$$

Ejemplo 8. $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

En los límites de la primera semicircunferencia se tiene sólo un ángulo, correspondiente al valor de la tangente, igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Este ángulo es $\frac{\pi}{6}$. Todos los ángulos res-

tantes se obtienen sumándole un número entero de períodos de manera que

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Ejemplo 9. $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}$. Resolución:

$$\frac{2x}{3}=-\frac{\pi}{3}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

Ejemplo 10. $\operatorname{sen}(2x-1{,}5)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$2x-1{,}5=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \ldots),$$

$$2x=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+\pi k+1{,}5,$$

$$x=\frac{\pi}{8}\cdot(-1)^k+\frac{\pi}{2}k+0{,}75.$$

§ 126. Ejemplos de ecuaciones trigonométricas más complejas

Ejemplo 1. $\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x+\cos x=0$.
En dicha ecuación hay dos funciones de igual argumento, por eso expresamos $\operatorname{sen}^2 x$ por el coseno de manera que la ecuación contenga sólo una función ($\cos x$):
$\sqrt{2}(1-\cos^2 x)+\cos x=0$.
Se ha obtenido una ecuación cuadrática respecto a $\cos x$:
$\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0$.
de donde

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}}, \quad \cos x_1=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x_1=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$$\cos x_2=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1,$$

lo que no da solución.

Ejemplo 2. $\operatorname{sen} 2x+\cos x=0$.
Reducimos la función a un argumento:

$2\operatorname{sen} x\cos x+\cos x=0$.

Descompongamos el primer miembro en factores

$\cos x\,(2\,\text{sen}\,x+1)=0.$

Igualamos cada factor a cero:

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$

2) $2\,\text{sen}\,x+1=0,\ \text{sen}\,x=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1}+\pi k$
$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

Ejemplo 3. $2\,\text{sen}^2\,2x-1=0.$
A pesar de que esta ecuación se resuelve fácilmente con respecto a sen $2x\left[\text{sen}\,2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; sin embargo, es más conveniente sustituir $2\,\text{sen}^2\,2x$ por $1-\cos 4x$.
Tendremos

$1-\cos 4x-1=0,$

$\cos 4x=0;\ 4x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$

$x=\frac{\pi}{8}(2k+1)\quad (k=0,\pm 1,\ \ldots).$

Ejemplo 4. $1-\cos(\pi-x)+\text{sen}\,\frac{\pi+x}{2}=0.$

Puesto que $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$, la ecuación toma la forma

$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0,$

$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$

$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0;$

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\ \frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1),$
$x_1=\pi(2k+1)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots);$

2) $2\cos\frac{x}{2}+1=0,\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{x_2}{2}=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,$

$x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$

▲ **Ejercicios**

1. Dados sen $\alpha=\frac{3}{5}$; sen $\beta=\frac{-7}{25}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

hallar: 1) sen $(\alpha+\beta)$; 2) sen $(\alpha-\beta)$; 3) cos $(\alpha+\beta)$; 4) cos $(\alpha-\beta)$; 5) tg $(\alpha+\beta)$; 6) tg $(\alpha-\beta)$.

2. $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{15}{8}$; $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.

Calcular $\cos(\alpha-\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

3. Simplificar las siguientes expresiones:

1) $\cos(a-b)-2\cos a\cos b-2\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$;

2) $\operatorname{sen}(45°+\alpha)\operatorname{sen}(45°-\alpha)+\cos(45°+\alpha)\cos(45°-\alpha)$;

3) $\cos x+\cos(120°+x)+\cos(240°+x)+\operatorname{sen} x$;

4) $\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}(\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)$;

5) $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$;

6) $1+\cos 2\alpha-2\operatorname{sen}^3\alpha$;

7) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$;

8) $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

4. Dados $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$; α y β son ángulos agudos. Hallar:

1) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$;

2) $\operatorname{sen} 2\alpha$; 3) $\cos 4\alpha$; 4) $\operatorname{sen}(2\alpha-\beta)$; 5) $\cos\frac{\beta}{2}$; 6) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

5. Dado $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; hallar: 1) $\operatorname{sen}\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$.

6. Demostrar las identidades:

1) $\frac{2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x}=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$;

2) $\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)=0$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\operatorname{tg} 2x$;

4) $1-\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)=\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos^2(45°-\alpha)}$;

5) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\operatorname{sen} 2\alpha}=\operatorname{tg}(45°-\alpha)$;

6) $\frac{\cos^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$;

7) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\frac{1-\operatorname{sen} 4x}{1+\operatorname{sen} 4x}$;

8) $\frac{1+\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

9) $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x-\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1+\cos x$;

10) $2\cos^2 y+\cos y-1=2\cos\frac{3y}{2}\cos\frac{y}{2}$;

11) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$, si $x+y+z=\pi$;

12) $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

7. Dados $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{4}$, α y β son ángulos agudos; hallar:
1) $\operatorname{sen}(2\alpha+2\beta)$; 2) $\cos 2(\alpha-\beta)$.

8. Calcular $\cos 2x$, si el ángulo x satisface la correlación

$\operatorname{tg}^2 x-a\operatorname{tg}x+1=0$; $0<x<\frac{\pi}{4}$.

9. Resolver las ecuaciones:

1) $3\operatorname{sen}x=2\cos^2 x$;

2) $\operatorname{sen}x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$;

3) $\operatorname{sen}2x=\cos 2x$;

4) $\operatorname{sen}2x=(\cos x-\operatorname{sen}x)^2$;

5) $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{sen}(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$;

7) $\operatorname{sen}2x\cos x+\cos 2x\operatorname{sen}x=0$;

8) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$;

9) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2 x$;

10) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=0$;

11) $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=$
$=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

12) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+$
$+2\cos x+2=0$;

13) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right):\operatorname{ctg}x=$
$=\frac{1}{3}$;

14) $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos 2x$;

15) $3\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

10. Calcular sin tablas:

1) $\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{5\pi}{8}+\operatorname{sen}^4\frac{7\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}7^\circ 30'$.

11. Transformar en producto:

1) $1-\operatorname{sen}x+\cos x$;

2) $\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}3a$;

3) $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$;

4) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}(x+y)$;

5) $\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x}$;

6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$.

CAPITULO XI

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

§ 127. Función directa e inversa

La función

$$y = f(x) \tag{1}$$

la llamamos *directa*; en tal caso la función

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

obtenida de la ecuación (1) después de resolverla respecto a x, se llama *inversa* con relación a la función $y = f(x)$.

Ejemplos.

1) $y = 2x - 3$ (es una función directa, lineal),

$x = \frac{y+3}{2}$ (es una función inversa, también lineal);

2) $y = 2x^2$ (función directa), $x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$;

aquí hay dos funciones, cada una de las cuales se puede llamar inversa para la función directa $y = 2x^2$. Si queremos obtener una función inversa de simple valuación, hay que imponer una limitación en el campo de variación del argumento x de la función directa; por ejemplo, si $y = 2x^2$ y $x \geqslant 0$, tendremos su función inversa de simple valuación $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$. Cabe hacer notar que la función directa $y = 2x - 3$ y su función inversa $x = \frac{y+3}{2}$ tiene la misma gráfica, puesto que cualquier par de números que satisfaga la ecuación (1) satisface también la ecuación (2). Por ejemplo, para la función $y = 2x - 3$, tendremos $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = -3$; $y_2 = -9$. Pero, si en la función inversa cambiamos de lugares x e y, es decir, la función inversa la vamos a designar, como la directa, por la letra y, y el argumento por la letra x, las gráficas de las funciones

$y = 2x - 3$ (función directa), $y = \frac{x+3}{2}$ (función inversa)

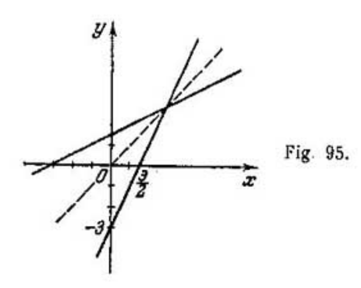


Fig. 95.

ya no coinciden: ellas son simétricas respecto a las bisectrices de los ángulos de coordenadas primero y tercero (fig. 95).

De este modo, la función directa $y = f(x)$ tendrá se función inversa de simple valuación $x = \varphi(y)$ ó, para las notaciones corrientes del argumento y de la función, $y = \varphi(x)$, si para la función directa se toma una región de variación tal del argumento x, en la que la función y ó sólo crece, o sólo decrece.

Ejemplo. La función $y = x^3$ crece en todo el eje numérico. Su función inversa $y = x^{1/3}$ también crece en todas partes.

§ 128. Función arco seno

Vamos a partir de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 89). A cada valor del ángulo x corresponde un valor determinado y único del seno de este ángulo; en la interpretación geométrica esto significa que la perpendicular trazada desde cualquier punto del eje Ox corta a la curva de la función sólo en un punto. ¿Empero, se podría decir lo contrario, es decir, que a cada valor admisible del seno, o sea, al número y, corresponde un valor único del ángulo x? Evidentemente que no, puesto que sabemos que al valor dado del seno corresponde un conjunto infinito de ángulos; por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, tendremos que $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, es decir, k es un número entero cualquiera. Geométricamente estos ángulos los obtenemos si trazamos una recta paralela al eje Ox a una distancia

$d=\frac{1}{2}$ y sobre el eje Ox. Esta paralela corta a la sinusoide infinitas veces, puesto que la gráfica puede continuarse indefinidamente a ambos lados. En la fig. 88 se muestran los puntos de intersección, cuyas abscisas x son iguales a

$$\ldots;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi;\ \ldots$$

De este modo, por ahora no se puede establecer la correspondencia inversa entre los valores del seno (y) y los valores de x, de manera que esta correspondencia sea unívoca. No obstante, *si el ángulo x se considera variable sólo en el segmento* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, *a cada valor de y ($|y|\leqslant 1$) le corresponderá un único valor de x*. En otras palabras, existe una función inversa de simple valuación que se designa del modo siguiente:

Si

$$y=\operatorname{sen} x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

tendremos que

$$x=\operatorname{arc\,sen} y\ \ (|y|\leqslant 1).$$

La última igualdad se lee así: x es un ángulo (arco) medido en radianes, cuyo seno es igual a y, o abreviadamente: «x es igual al *arco seno* de y». La notación «arc sen» está formada por dos palabras «arco» y «seno»; algunos autores las escriben juntos «arcsen», aquí las escribiremos separadas.
El argumento de la función inversa también se admite en designar por la letra x, y la función, por la letra y, de manera que en lugar de $x=\operatorname{arc\,sen} y$ en adelante escribiremos:

$$y=\operatorname{arc\,sen} x,$$

donde

$$|x|\leqslant 1,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

La propiedad de que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$ sean inversas se escribe así:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)=x,\ \text{si}\ |x|\leqslant 1,$$

$$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=x,\ \text{si}\ |x|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

es decir, los signos de las operaciones «arc sen», y «sen» si se suceden una a otra, se anulan mutuamente y queda el número

x, con el cual se realizaron sucesivamente estas dos operaciones. Por ejemplo, 1) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arc\,sen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\frac{\pi}{6}$.

Sin embargo,

$$\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\neq\frac{2}{3}\pi.$$

Esta expresión se debe calcular así:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3},$$

de donde

$$\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos cuyos senos son iguales a x ($|x|\leqslant 1$), se designa por la notación Arc sen x, de manera que, por ejemplo,

$$\operatorname{Arc\,sen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k,$$

$$\operatorname{Arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 129. Curva de la función $y = \operatorname{arc\,sen} x$

Para trazar la gráfica de la función

$$y=\operatorname{arc\,sen} x \qquad (1)$$

puede servirse de que de la correlación (1) se deduce

$$x=\operatorname{sen} y \qquad (2)$$

por definición de la función arc sen.

Si construimos la parte de la sinusoide $x = \operatorname{sen} y$, que corresponde a la variación del argumento y en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ésta es precisamente la gráfica de la función

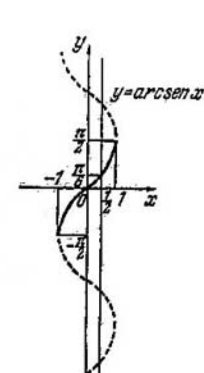


Fig. 96.

$y = \text{arc sen } x$ (fig. 96). Toda la sinusoide $x = \text{sen } y$ es la gráfica de la función de valuación multiple

$$y = \text{Arc sen } x.$$

Señalemos las propiedades de la función $\text{arc sen } x$, que se manifiestan mediante la gráfica:

1) la función está definida solamente en el segmento $[-1, 1]$;

2) el conjunto de todos los valores de la función compone el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc sen } x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

3) si el argumento x recorre el segmento $[-1, 1]$ de izquierda a derecha, los valores de la función y varían desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, es decir, la función crece en todo el segmento $[-1, 1]$, adquiriendo el menor valor para $x = -1$, igual a $-\frac{\pi}{2}$, y el mayor valor para $x = 1$, igual a $\frac{\pi}{2}$;

4) la función se hace nula cuando $x = 0$;

5) la función $\text{arc sen } x$ es impar:

$$\text{arc sen } (-x) = -\text{arc sen } x;$$

su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

§ 130. Función arco tangente

La función $y = \operatorname{tg} x$ pone a cada valor del argumento x, del campo de definición $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, en correspondencia un valor determinado de y, es decir, la tangente de este ángulo. Se puede establecer también la correspondencia unívoca inversa entre los valores de y y x, si a la función $y = \operatorname{tg} x$ la vamos a considerar sólo para los valores de x que se encuentran en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. En tal caso, a cada número real y, tomado como valor de la tangente, se puede poner en correspondencia el único número x, es decir, el correspondiente ángulo en radianes: cualquier recta paralela al eje Ox, trazada a una distancia finita cualquiera del eje Ox (indistintamente sobre o debajo de él), interseca a la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$ sólo en un punto, cuya abscisa se encuentra entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (fig. 91).

● DEFINICIÓN. La función inversa a la tangente se llama *arco tangente.*

Si $y = \operatorname{tg} x$ es la función directa, tendremos que $x = \operatorname{arc\,tg} y$ es la función inversa.

Esta notación hay que entenderla así: "x es un ángulo tal, medido en radianes, tomado en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cuya tangente es igual al número y". Trasladando las designaciones del argumento y de la función, escribimos la función inversa en la forma $y = \operatorname{arc\,tg} x$. En esta notación el argumento x (tangente) es un número real cualquiera; la función y (ángulo en radianes) es un número cualquiera del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La propiedad de que las operaciones «tg» y «arc tg» sean inversas se escribe del siguiente modo

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \ (x \text{ es un número real cualquiera}),$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

De este modo

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2) = 2, \quad \operatorname{tg}[\operatorname{arc\,tg}(-\pi)] = -\pi;$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ pero } \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) \neq \frac{3\pi}{4},$$

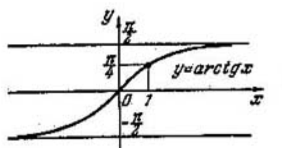


Fig. 97.

puesto que el ángulo $\frac{3}{4}\pi$ sale de los límites del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por eso hay que escribir:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos (arcos), cuyas tangentes son iguales al número dado x, se designan por Arc tg x. De aquí se deduce que la función $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ es de valuación multiple:

$$\operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\operatorname{Arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 131. Curva de la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$

En la fig. 97 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$. Esta curva coincide con la curva de la función $x = \operatorname{tg} y$, cuando el argumento y varía en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Propiedades de la función arc tg x:

1) el argumento x puede ser un número real cualquiera, es decir, la función está definida en todo el eje numérico;

2) el conjunto de valores de la función (y) forma el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) la función arc tg x es impar, puesto que $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$; la gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas;

4) la función arc tg x crece en todo su campo de definición; cuando x, al crecer, recorre el eje numérico (eje de abscisas) de izquierda a derecha, los valores de la función aumentan sucesivamente;

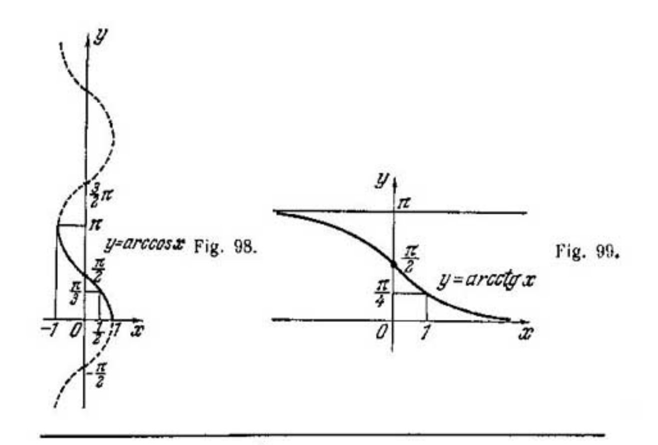


Fig. 98.
Fig. 99.

5) la función arco tangente no tiene valores máximo ni mínimo, si se la considera en todo el eje numérico ($-\infty < x < +\infty$).

§ 132. Funciones inversas de arc cos x y arc ctg x

● DEFINICION 1. La función inversa al coseno se llama *arco coseno.*
Si $y = \cos x$, tendremos que $x = \text{arc cos } y$, lo que se debe interpretar del siguiente modo: x es un ángulo (arco) cuyo coseno es igual a y. Designando el argumento de la función inversa también por la letra x, y la función por la letra y, obtendremos la notación

$$y = \text{arc cos } x.$$

La función arco coseno será de simple valuación si el conjunto de sus valores están comprendidos en el segmento $[0, \pi]$. En tal caso, a cada valor de $|x| \leqslant 1$ corresponde un único valor de y $(0 \leqslant y \leqslant \pi)$.
La propiedad de que las funciones $\cos x$ y arc cos x sean inversas se escribe así:

$$\cos(\text{arc cos } x) = x, \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\text{arc cos}(\cos x) = x, \text{ si } \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

La gráfica de la función $y = \text{arc cos } x$ coincide con la parte de la gráfica de la función $x = \cos y$, que corresponde a la

variación de y desde 0 hasta π (fig. 98). Utilizando esta gráfica establézcase las propiedades de la función arc cos x.

DEFINICION 2. La función inversa a la cotangente se llama *arco cotangente*.

De la igualdad $y = \text{ctg } x$ se deduce que $x = \text{arc ctg } y$, o en las notaciones ya acostumbradas

$$y = \text{arc ctg } x. \tag{1}$$

En la igualdad (1) x es un número real cualquiera, tomado como valor de la cotangente, y es el ángulo (arco) correspondiente tomado del intervalo $0 < y < \pi$. En la fig. 99 se muestra la gráfica de la función

Ejemplos.

1) $\text{arc ctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$;

2) $\text{arc ctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$;

3) $\text{arc cos}(-1) = \pi$;

4) $\text{arc cos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

La propiedad de que las funciones arc ctg x y ctg x sean inversas se puede apreciar de la siguiente anotación

$$\text{ctg}(\text{arc ctg } x) = x, \text{ si } -\infty < x < \infty;$$
$$\text{arc ctg}(\text{ctg } x) = x, \text{ si } \quad 0 < x < \pi.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos, cuyos cosenos (cotangentes) son iguales a x, se designa con la notación Arc cos x (respectivamente Arc ctg x). Por ejemplo:

$$\text{Arc cos}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$\text{Arc ctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi + \pi k,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 133. Algunas identidades que relacionan las funciones trigonométricas inversas

Teorema. *Para todo valor real de x que satisfaga la desigualdad $|x| \leqslant 1$, se tendrá la identidad*

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}.$$

DEMOSTRACION. Examinemos los dos ángulos

$$\text{arc sen}\, x \text{ y } \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x$$

y demostraremos que ellos coinciden.
Por definición

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc sen}\, x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \text{arc cos}\, x \leqslant \pi.$$

De las últimas desigualdades obtendremos:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

De este modo, ambos ángulos están contenidos en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que es, como se sabe, el conjunto de valores de la función *de simple valuación* $y = \text{arc sen}\, x$. Por lo tanto, para la demostración de la coincidencia de estos ángulos es suficiente demostrar la coincidencia de sus senos. En efecto,

$$\text{sen}\,(\text{arc sen}\, x) = x,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x\right) = \cos\,(\text{arc cos}\, x) = x,$$

con lo que el teorema queda demostrado.
De un modo semejante se puede demostrar que para cualquier valor real de x se cumple la identidad

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc ctg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Recomendamos a los lectores la demostración individual del mismo.

§ 134. Expresión de cualquier función trigonométrica inversa mediante las demás funciones

Cualquiera de las cuatro funciones trigonométricas inversas se puede expresar mediante cualquiera de las tres restantes.
1. Expresión del arc sen x mediante el arc cos, arc tg y arc ctg. Tengamos

$$\text{sen}\, \alpha = x \quad (0 < x < 1).$$

En tal caso

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\sqrt{1-x^2},\\ \operatorname{tg}\alpha&=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\ \operatorname{ctg}\alpha&=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Las igualdades (1) y la igualdad inicial son equivalentes a las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arc\,sen} x,\\ \alpha&=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2},\\ \alpha&=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\ \alpha&=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Estas igualdades se deducen de la misma definición de las funciones trigonométricas inversas.

Puesto que los primeros miembros de las igualdades (2) son iguales entre sí, también son iguales sus segundos miembros:

$$\operatorname{arc\,sen} x=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Ejemplo.

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{13}=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}=\operatorname{arc\,ctg}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}{\frac{5}{13}}$$

o bien.

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{13}=\operatorname{arc\,cos}\frac{12}{13}=\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{12}{5}.$$

2. Expresión del $\operatorname{arc\,tg} x$ mediante las restantes funciones trigonométricas inversas. Tenemos

$$\operatorname{tg}\alpha=x\quad\left(x>0;\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

En tal caso

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{x},\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Por eso

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arc\,tg} x,\\ \alpha&=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x},\\ \alpha&=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\ \alpha&=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ejemplo.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}},$$

o bien

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}=\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}=\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}.$$

Recomendamos a los lectores demostrar por el mismo método la validez de las siguientes igualdades:

$$\operatorname{arc\,cos} x=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(0<x\leqslant 1)$;

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (x>0).$$

§ 135. Ejemplos de funciones trigonométricas inversas

Ejemplo 1. Calcular $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)+3\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Suponemos que:

$$\alpha=\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \beta=\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En tal caso

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, por lo tanto, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$,

$\operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, $\beta=\frac{\pi}{3}$,

de donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$.

Suponemos que

$$\alpha=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3},\quad \beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

En tal caso

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{8}};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}.$$

Por la fórmula de la tangente de la suma tendremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right|_{\substack{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}},\\ \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3\sqrt{8}}}=\frac{3+8\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-4}\approx 3{,}19.$$

Ejemplo 3. Calcular $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{4}\right)$.
En las nuevas notaciones este ejemplo se puede escribir del siguiente modo:

$$\operatorname{sen}\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

donde

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},\\ \beta&=\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{4}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Conforme a estos datos calculamos previamente $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$ y $\cos\frac{\beta}{2}$, puesto que

$$\operatorname{sen}\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}2\alpha\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cos 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}.\tag{2}$$

De las igualdades (1) se deduce que

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{3}{4}$,

donde α y β son ángulos agudos. Por eso,

$$\operatorname{sen} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

para $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ tendremos:

$$\operatorname{sen} 2\alpha=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\bigg|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

(aquí el ángulo α se considera como mitad con respecto a 2α y, por eso, se han utilizado las fórmulas del § 119). Análogamente

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\bigg|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\bigg|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{14}.$$

A continuación, utilizando la (2), tendremos

$$\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{14}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}\approx 0{,}536.$$

E j e m p l o 4. Verificar si se cumple la igualdad

$$\underbrace{\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{2}{11}}_{\alpha}+\underbrace{2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{7}}_{2\beta}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}.$$

Si esta igualdad se cumple, es decir, el primer y segundo miembro son ángulos idénticos, tendremos que a iguales ángulos les corresponden iguales tangentes. Tomemos las tangentes de ambos miembros:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right)=\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta}.$$

Pero

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1-\operatorname{tg}^2 \beta}\Big|_{\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}} = \frac{7}{24} \left(0 < 2\beta < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{11} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right),$$

por lo cual $\alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2}$, y el primer miembro de la igualdad es un ángulo agudo, además,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg} \frac{2}{11} + 2 \operatorname{arc tg} \frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg} \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

De la igualdad de las tangentes de los dos ángulos agudos se deduce la igualdad de los mismos ángulos. Con esto queda demostrada la igualdad.

E j e m p l o 5. Hallar x de la ecuación

$$\operatorname{arc sen} x - \operatorname{arc cos} x = 0 \qquad (x > 0).$$

Puesto que $\operatorname{arc sen} x = \operatorname{arc cos} \sqrt{1-x^2}$, la ecuación puede tomar la siguiente forma:

$$\operatorname{arc cos} \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc cos} x,$$

de donde

$$\sqrt{1-x^2} = x, \ 1-x^2 = x^2;$$

$$2x^2 = 1, \text{ ó } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Verificación:

1) $\operatorname{arc sen} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arc cos} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0;$

2) $\operatorname{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \neq 0.$

El número $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ no es una raíz de la ecuación dada, sino es la raíz de la ecuación

$$\operatorname{arc sen} x - \operatorname{arc cos} x = -\pi.$$

§ 136. Algunos ejemplos de ecuaciones trigonométricas

En el § 124 se dieron ejemplos de resolución de ecuaciones trigonométricas elementales.

Veamos otros tipos de ecuaciones trigonométricas y sus métodos de resolución.

1. Ecuación del tipo

$$a \cos^2 x + b \cos x \cdot \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen}^2 x = 0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) se llama *homogénea* respecto a sen x y cos x, además el grado de homogeneidad es igual a 2. (Compárese con la ecuación algebraica $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, que también se llama homogénea de segundo grado respecto a x e y).

Vamos a considerar los tres coeficientes a, b y c distintos de cero. Es evidente que los ángulos, cuyos senos o cosenos son nulos, no pueden ser soluciones o raíces de la ecuación (1):

$$\cos x \neq 0, \ \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Supongamos lo contrario, es decir, que $\cos x = 0$. En tal caso los dos primeros términos del primer miembro de la ecuación (1) se hacen nulos, y se obtiene:

$$c \cdot \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

lo que es un absurdo para $c \neq 0$, puesto que $\operatorname{sen} x = \pm 1$ cuando $\cos x = 0$.

Análogamente comprobamos que $\operatorname{sen} x \neq 0$. En tal caso, todos los términos de la ecuación se pueden dividir por $\cos^2 x$ (o por $\operatorname{sen}^2 x$). Obtendremos una ecuación cuadrática con respecto a la tangente (correspondientemente a la cotangente):

$$c \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + a = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, la ecuación tiene raíces reales.

E j e m p l o. $2 \cos^2 x + 5 \cos x \cdot \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^2 x = 0$. Después de dividir por $\cos^2 x$, obtendremos:

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

$(\operatorname{tg} x)_1 = -\frac{1}{3}, \quad (\operatorname{tg} x)_2 = 2;$

$x_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad x_1 = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \pi k,$

$x_2 = \operatorname{arc\,tg} 2 + \pi k,$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
En general, la ecuación de tipo

$$a\cos^2 x + b\cos x \operatorname{sen} x + c\operatorname{sen}^2 x = m,$$

donde $m \neq 0$, se resuelve del siguiente modo: multipliquemos el segundo miembro de la ecuación por $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. En tal caso

$$a\cos^2 x + b\cos x \operatorname{sen} x + c\operatorname{sen}^2 x = m(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x),$$
$$(a - m)\cos^2 x + b\operatorname{sen} x \cdot \cos x + (c - m)\operatorname{sen}^2 x = 0.$$

Esta es una ecuación homogénea y se resuelve por el método anterior.

2. Ecuación del tipo

$$a\cos x + b\operatorname{sen} x = c \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$$

Expresemos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ por la $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (§ 119); obtendremos:

$$a\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c,$$

o bien

$$a\frac{1-z^2}{1+z^2} + b\frac{2z}{1+z^2} = c \quad \left(z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

lo que nos conduce a una ecuación de segundo grado:

$$(a + c)z^2 - 2bz + c - a = 0.$$

Si el discriminante $D = b^2 - (c - a)(a + c) \geqslant 0$, ó $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, la ecuación tiene raíces reales.

E j e m p l o. $5\cos x + 4\operatorname{sen} x = 3$.
Aquí $a^2 + b^2 - c^2 = 25 + 16 - 9 = 32 > 0$, y la ecuación tiene raíces reales. Obtendremos

$$8z^2 - 8z - 2 = 0,$$
$$4z^2 - 4z - 1 = 0,$$
$$z_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2},\quad \frac{x_1}{2}=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi k,$$

$$x_1=-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+2\pi k;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2},\quad x_2=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}+2\pi k.$$

El menor ángulo positivo que satisface a la ecuación dada es

$$x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Al principio hallemos su magnitud en grados y después en radianes:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\approx\frac{2{,}4142}{2}=1{,}2071,$$

$$\operatorname{arc\,tg}1{,}2071\approx 50^\circ\,22',$$

$$2\operatorname{arc\,tg}1{,}2071\approx 100^\circ\,44'\approx 1{,}758\ \text{rad}.$$

Segundo método de resolución. Transformemos el primer miembro de la ecuación:

$$5\cos x+4\operatorname{sen}x=4\left(\frac{5}{4}\cos x+\operatorname{sen}x\right).$$

Introduzcamos el ángulo auxiliar φ; suponiendo que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{4}$ ($\varphi=51^\circ20'$), tendremos

$$5\cos x+4\operatorname{sen}x=4(\operatorname{tg}\varphi\cos x+\operatorname{sen}x)=\frac{4}{\cos\varphi}\operatorname{sen}(x+\varphi).$$

Ahora la ecuación toma la forma

$$\frac{4}{\cos\varphi}\operatorname{sen}(x+\varphi)=3,$$

de donde

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{3\cos\varphi}{4}.$$

Pero,

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{16}}}=\frac{4}{\sqrt{41}}\approx\frac{4}{6{,}403},$$

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)\approx\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6{,}403}\approx\frac{1}{2{,}134}\approx 0{,}4686.$$

Por eso,

$$x+\varphi=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}0{,}4686+\pi k\ (k=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Pero

$\arcsin 0{,}4686 \approx 27°57'$.

Finalmente,

$x = -51°20' + (-1)^k \cdot 27°57' + 180° k$.

Frecuentemente, después de transportar todos los términos de la ecuación al primer miembro, se consigue descomponer este miembro en factores. Igualando a cero cada factor, hallamos las raíces de la ecuación dada.

Ejemplos. 1) $\cos x - \cos 2x = 1$. Representemos la ecuación en la siguiente forma

$$\cos x - (1 + \cos 2x) = 0,$$
$$\cos x - 2\cos^2 x = 0,$$
$$\cos x (1 - 2\cos x) = 0.$$

Si el producto es igual a cero, debe ser igual a cero aunque sea uno de los factores: o bien

$$\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

o bien

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0$. Transformemos la suma $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x$ en producto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x = 2 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x.$$

La ecuación toma la forma

$$2 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x + \operatorname{sen} 3x = 0,$$
$$\operatorname{sen} 3x (2\cos 2x + 1) = 0.$$

Igualando a cero cada factor por separado, obtendremos:

$$\operatorname{sen} 3x = 0, \ 3x = \pi k, \ x_1 = \frac{\pi}{3} k \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots);$$

$$2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

de donde

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

§ 137. Indicaciones generales para la resolución de las ecuaciones trigonométricas

Los métodos de resolución de las ecuaciones trigonométricas son variadísimos y no existe una regla general de resolución de cada ecuación. Por eso, nos limitaremos a mostrar en ejemplos algunos de los métodos de resolución frecuentemente utilizados.

1) Si la ecuación contiene varias funciones trigonométricas diferentes de igual argumento, todas las funciones se pueden expresar mediante una de ellas, después de lo cual obtendremos una ecuación algebraica con respecto a la incógnita, que designa la función por la cual se expresan todas las demás.

E j e m p l o 1. $3 \operatorname{sen} x + \cos^2 x = 2$. Aquí es conveniente expresar $\cos^2 x$ por el seno, después de lo cual obtendremos una ecuación cuadrática respecto a $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

Resolviéndola, obtendremos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382,$$

$$x = (-1)^k\ 22^\circ\ 30' + 180^\circ \cdot k \ (k = 0,\ \pm 1,\ \ldots);$$

la segunda raíz, $\operatorname{sen} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ se desprecia, puesto que $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$.

E j e m p l o 2. $3 \operatorname{sen} x + \cos x = 1$. En este caso no conviene sustituir $\cos x$ por $\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$, puesto que obtendríamos una ecuación irracional respecto a $\operatorname{sen} x$, y después de librarnos del radical podrían aparecer raíces impropias. Lo sencillo es resolver esta ecuación del siguiente modo:

$$3 \operatorname{sen} x - (1 - \cos x) = 0.$$

$$6 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Después de simplificar por 2 y descomponer el primer miembro en factores, tendremos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} \left(3 \cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0, \quad x_1 = 2\pi k;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3, \quad x_2 = 2 \operatorname{arc\,tg} 3 + 2\pi k.$$

2) Si la ecuación contiene funciones trigonométricas de distintos argumentos, en los que se encuentra la incógnita, frecuentemente lo conveniente es reducir las funciones a un argumento.

E j e m p l o 3. $\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 1{,}5$. Aquí $\cos 2x$ se puede expresar solamente por $\operatorname{sen} x$, puesto que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, después de lo cual obtendremos una ecuación cuadrática respecto a $\operatorname{sen} x$:

$$8\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{sen} x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots),$$

$$\operatorname{sen} x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = (-1)^{k+1} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4} + \pi k$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

E j e m p l o 4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. Al resolver esta ecuación no es necesario reducir todas las funciones a un argumento. Transformemos el primer miembro de la ecuación en un producto:

$$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0,$$

$$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1); \quad x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

3) Los ejemplos expuestos demuestran que uno de los métodos más eficientes de resolución de las ecuaciones es la descomposicion del primer miembro de la ecuación en factores después de pasar todos los términos a ese miembro. Por eso, a veces se hace necesario recurrir a métodos artificiosos de descomposición.

E j e m p l o 5. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$. Representemos la ecuación en la siguiente forma:

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} - 1 = 2\operatorname{sen} x \cos x,$$

o bien

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0;$$

sacamos el factor común sen x:

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{\frac{1}{\cos x}}{1-\operatorname{tg} x}-\cos x\right)=0,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\cos x-\operatorname{sen} x}-\cos x\right)=0;$$

1) $\operatorname{sen} x=0,\ x_1=\pi k\ \ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$

2) $\dfrac{1}{\cos x-\operatorname{sen} x}-\cos x=0,$

$$\frac{1-\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=0.$$

Suponiendo que $\cos x-\operatorname{sen} x\neq 0$, hallamos

$1-\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=0,$

$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=0,$

$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x+\cos x)=0;$

de donde o bien $\operatorname{sen} x=0$, entonces tendremos 1), o bien

$\operatorname{sen} x+\cos x=0,$

o bien

$$\operatorname{tg} x=-1,\ \ x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k\ \ (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

4) Si la ecuación contiene senos o cosenos cuadrados del argumento incógnito, generalmente se utilizan las fórmulas de reducción de la potencia, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $\frac{1-\cos 2x}{2}$, y $\cos^2 x$ por $\frac{1+\cos 2x}{2}$. Este método conviene utilizarlo también para potencias pares más superiores del seno y del coseno.

Ejemplo 6. $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$. Resolución:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{5}{8},$$

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2=\frac{5}{2},$$

$$2+2\cos^2 2x=\frac{5}{2}$$

o bien

$$1+\cos 4x=\frac{1}{2} \quad \cos 4x=-\frac{1}{2},$$

$$4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

5) La ecuación, que contiene términos con productos de senos o cosenos, puede ser conveniente reducirla a la forma en la que los productos sean sustituidos por sumas algebraicas.

E j e m p l o 7. $\operatorname{sen} 5x \cos 3x - \operatorname{sen} 8x \cos 6x = 0$. Resolución:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 8x+\operatorname{sen} 2x)-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 14x+\operatorname{sen} 2x)=0,$$

$$\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 14x=0,$$

$$-2\operatorname{sen} 3x \cos 11x=0,$$

$$\operatorname{sen} 3x=0,\ x_1=\frac{\pi}{3}k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

$$\cos 11x=0,\ x_2=\frac{\pi}{22}(2k+1) \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

§ 138. Gráficas de las funciones obtenidas por transformación de la sinusoide

1. Gráfica de la función $y=\operatorname{sen}(x+a)$. Veamos como están relacionadas entre sí las gráficas de las funciones

$y=\operatorname{sen} x$ e $y=\operatorname{sen}(x+a)$.

Supongamos para certeza que $a>0$.
Para iguales valores de la variable independiente x los argumentos de estas dos funciones se diferencian en la magnitud constante $(x+a)-x=a$. Debido a esto, a todo punto M de la gráfica de $y=\operatorname{sen} x$ le corresponderá un punto M_1 de la segunda gráfica, de igual ordenada pero la abscisa del punto M_1, es menor que la del punto M en la magnitud a. De este modo, cualquier punto de la primera gráfica puede transformarse en el punto correspondiente de la segunda gráfica transportándolo paralelamente al eje Ox en la magnitud a en sentido negativo (fig. 100). Si se desplaza la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ a lo largo del eje Ox a la magnitud a, en sentido negativo, se producirá la unión (coincidencia) de

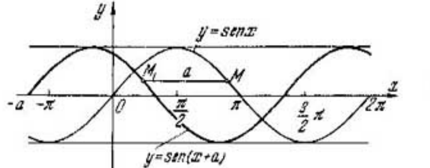


Fig. 100.

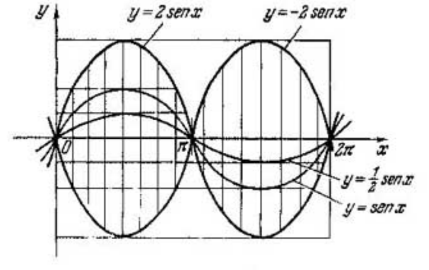


Fig. 101.

---

estas dos gráficas, y puede decirse que *la gráfica de* $y = \operatorname{sen}(x + a)$ *es la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$ *desplazada a la magnitud a a lo largo del eje Ox hacia la izquierda*. En general, *la gráfica de la función* $y = \operatorname{sen}(x + a)$ *es la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$, *desplazada a la magnitud* $|a|$ a lo largo *del eje Ox hacia la derecha cuando* $a < 0$, *y hacia la izquierda cuando* $a > 0$;

Observación. En particular, cuando $a = \frac{\pi}{2}$ tal transformación de la sinusoide la hemos examinado en el § 113 al construir la gráfica de la función $y = \cos x$, puesto que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

2. Gráfica de la función $y = A \operatorname{sen} x$. Comparemos las dos funciones: 1) $y = 2 \operatorname{sen} x$ $(A = 2)$ y 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ $\left(A = \frac{1}{2}\right)$ con la función $y = \operatorname{sen} x$.

Para iguales valores del argumento x los valores de la primera función son dos veces mayores que los correspondientes valores de la función $y = \operatorname{sen} x$; los valores de la segunda función son dos veces menores. En la representación geométrica esto significa que las ordenadas de la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$

pueden ser obtenidas de las correspondientes ordenadas de la curva $y = \operatorname{sen} x$ *alargándolas dos veces en dirección del eje* Oy (las ordenadas positivas se alargan hacia arriba, las negativas, hacia abajo).

La gráfica de la función $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ se obtiene de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ *comprimiendo* todas las ordenadas dos veces en dirección del eje Oy, lo que está representado en la fig. 101.

En general, *la gráfica de la función* $y = A \operatorname{sen} x$ *se obtiene de la gráfica de* $y = \operatorname{sen} x$ *alargando las ordenadas A veces en dirección del eje Oy cuando* $A > 1$ *y comprimiéndolas* $\frac{1}{A}$ veces, si $0 < A < 1$.

El número A se llama *amplitud* de la sinusoide $y = A \operatorname{sen} x$ y denota la desviación máxima de los puntos de la gráfica del eje Ox, es decir, la ordenada mayor en valor absoluto de la curva.

Observación. La gráfica de la función $y = -2 \operatorname{sen} x$ es la reflexión especular, respecto al eje Ox, de la gráfica $y = 2 \operatorname{sen} x$ (véase la fig. 101). En general, la gráfica de la función $y = A \operatorname{sen} x$ para $A < 0$ se obtiene de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ alargando las ordenadas, si $|A| > 1$ (respectivamente comprimiendo, si $|A| < 1$) con la ulterior reflexión respecto al eje Ox.

3. Gráfica de la función $y = \operatorname{sen} kx$. Supongamos que $y = \operatorname{sen} 2x$ ($k = 2$). Se comprende fácilmente que el período de esta función es igual a π, es decir, $T = \pi$, donde por T se ha designado el período. En efecto, por definición del período la igualdad

$$\operatorname{sen} 2(x + T) = \operatorname{sen} 2x$$

debe cumplirse para cualquier valor de x, ó

$$\operatorname{sen} (2x + 2T) = \operatorname{sen} 2x,$$

lo que es posible sólo si

$$2T = 2\pi n, \quad T = \pi n.$$

Puesto que $T = \pi$, cuando $n = 1$, tendremos que π es el menor número positivo, cuya adición a x no varía el valor de la función $y = \operatorname{sen} 2x$, es decir, *su período*. La gráfica de la función $y = \operatorname{sen} 2x$ es una sinusoide comprimida dos veces en dirección del eje Ox (fig. 102).

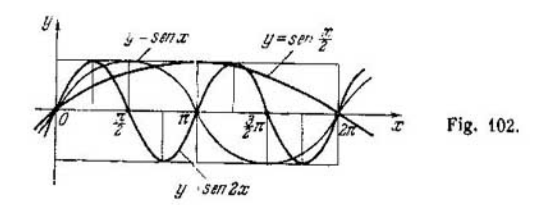


Fig. 102.

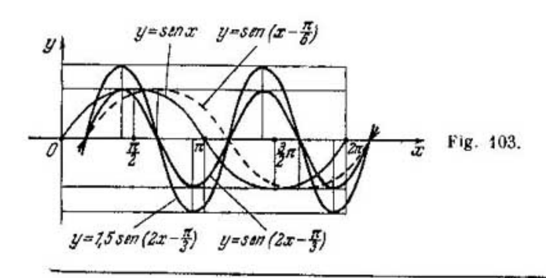


Fig. 103.

La gráfica de la función $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ es una sinusoide alargada dos veces con una longitud de onda (período) de 4π puesto que la identidad

$$\operatorname{sen} \frac{x+T}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

o bien

$$\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

se verificará para todos los valores de x, si

$$\frac{T}{2} = 2\pi, \text{ es decir, } T = 4\pi.$$

En la fig. 102 se muestra la construcción de la gráfica.

4. Gráfica de la función $y = \operatorname{sen} (kx + a), k > 0$. El argumento $(kx + a)$ se puede representar en la forma $k (x + a_1)$, donde $a_1 = \frac{a}{k}$. En tal caso, $y = \operatorname{sen} k (x + a_1)$. Desplazando paralelamente (trasladando) la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ la magnitud a_1 en dirección al eje Ox (en $| a_1 |$ hacia la derecha, si $a_1 < 0$, y hacia la izquierda cuando $a_1 > 0$) logra-

mos que a la nueva posición de la sinusoide corresponde la nueva ecuación $y = \text{sen}\,(x + a_1)$. Si ahora reducimos la longitud de la onda k veces, si $k > 1$ (correspondientemente alargamos $\frac{1}{k}$ veces, si $k < 1$), a tal transformación geométrica secundaria de la sinusoide le corresponde la ecuación $y = \text{sen}\,k\,(x + a_1)$, ó $y = \text{sen}\,(kx + a)$.

Así, pues, la gráfica de la función $y = \text{sen}\,(kx + a)$ *es una sinusoide transformada o deformada*. En la fig. 103 se muestra la gráfica de la función $y = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ con representación de cada transformación.

5. Gráfica de la función $y = A\,\text{sen}\,(kx + a)$. Esta gráfica es una deformación de la gráfica de $y = \text{sen}\,(kx + a)$, es decir, el *alargamiento* en A veces de todas las ordenadas de la gráfica en dirección al eje Oy, si $A > 1$, ó la *compresión* en $\frac{1}{A}$ veces, si $0 < A < 1$ (si $A < 0$, la respectiva compresión o alargamiento se realiza con la reflexión ulterior respecto al eje Ox). La semejante gráfica $\left(y = 1{,}5\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ se muestra en la fig. 103.

6. Función $y = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$. Demostremos que

$$y = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx \qquad (1)$$

puede ser reducida a la forma

$$y = C\,\text{sen}\,(kx + \alpha).$$

Multiplicamos y dividimos el segundo miembro de la igualdad (1) por $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$y = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos kx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\text{sen}\,kx\right).$$

Pongamos

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \text{sen}\,\alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha,$$

lo que siempre es posible, puesto que, en valor absoluto, cada una de las fracciones $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ no es mayor que la unidad y la suma de sus cuadrados es igual a la unidad:

$$\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leqslant 1;$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1.$$

En tal caso, tendremos;

$$y = \sqrt{A^2+B^2}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos kx+\cos\alpha\operatorname{sen}kx)=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(kx+\alpha)=C\operatorname{sen}(kx+\alpha),$$

donde $C=\sqrt{A^2+B^2}$.

Ejemplo. $y = -0{,}5\cos 2x + 1{,}2\operatorname{sen} 2x$. Aquí $A = -0{,}5$; $B = 1{,}2$; $k = 2$. Hallamos:

$$C=\sqrt{(-0{,}5)^2+(1{,}2)^2}=1{,}3.$$

En tal caso,

$$\cos\alpha=\frac{-0{,}5}{1{,}3}=-\frac{5}{13}\approx-0{,}3846;$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1{,}2}{1{,}3}=\frac{12}{13}\approx 0{,}9231.$$

El ángulo α corresponde al segundo cuadrante, en el que el seno tiene valor positivo, y el coseno, negativo. Por las tablas hallamos

$$\alpha = 180° - 67°23' = 112°37'.$$

En radianes

$$\alpha = 1{,}9654, \text{ ó } \alpha \approx 1{,}97.$$

De este modo

$$y = 1{,}3\operatorname{sen}(2x + 1{,}97),$$

es decir, hemos obtenido una ecuación del tipo examinado antes (véase el p. 5).

§ 139. Resolución gráfica de las funciones trigonométricas

Ejemplo 1. Supongamos querer resolver la ecuación trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 0$. Esto significa que hay que hallar las raíces de la función $y = \operatorname{sen} 2x$, mientras que en la interpretación geométrica, las abscisas de los puntos de intersección de la curva con el eje Ox. Los puntos de intersección de la curva $y = \operatorname{sen} 2x$ con el eje de abscisas se pueden dar por la fórmula $x = \frac{\pi}{2}k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), lo que está representado en la fig. 104.

Ejemplo 2. Las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ son las abscisas de los puntos de intersección de la curva $y =$

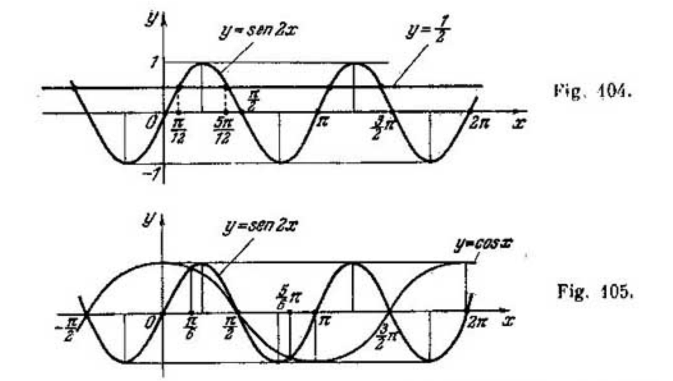


Fig. 104.

Fig. 105.

$=\text{sen}\, 2x$ con la recta $y=\frac{1}{2}$, paralela al eje Ox y dispuesta sobre ella a la distancia $d=\frac{1}{2}$. Los puntos de intersección tienen la forma

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En la fig. 104 están marcados los puntos próximos al origen de coordenadas de abscisas: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, ...

Ejemplo 3. La resolución de la ecuación $\text{sen}\, 2x - \cos x = 0$ se reduce a hallar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas de las dos funciones, $y = \text{sen}\, 2x$ e $y = \cos x$, puesto que a la ecuación se le puede dar la forma $\text{sen}\, 2x = \cos x$.
Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas $y = \text{sen}\, 2x$ è $y = \cos x$, es decir, las raíces de la ecuación, se determinan por dos fórmulas (fig. 105):

$$x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En la figura están representadas las raíces $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, obtenidas de la primera fórmula para $k=-1$, 0 y 1,

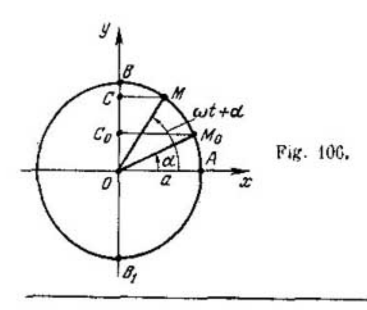


Fig. 106.

y las raíces $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, obtenidas de la segunda fórmula para $k=0$ y 1.

§ 140. Oscilación armónica simple

Por la circunferencia de radio $OA = a$ se mueve el punto M a una velocidad angular constante en sentido positivo. Según qué ley se mueve la proyección del punto M sobre el eje Oy, es decir, el punto C, si al comenzar el movimiento ($t = 0$) el punto M que se mueve por la circunferencia se halla en la posición M_0; la velocidad angular del punto M es igual a $\omega \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$ (fig. 106).

En el instante inicial el radio OM_0 forma con el eje Ox el ángulo $\angle AOM_0 = \alpha$. Después de t segundos el ángulo aumenta la magnitud ωt, y el radio OM, correspondiente a la nueva posición del punto, forma con el eje Ox el ángulo $\angle xOM = \omega t + \alpha$. En el tiempo t s la proyección del punto M sobre el eje Oy, o sea, el punto C, de la posición inicial C_0 se traslada por el eje Oy a la posición C. Si designamos por y el segmento OC, que caracteriza la desviación de la proyección C del centro de la circunferencia en el instante t, tendremos

$$\frac{y}{a} = \operatorname{sen}(\omega t + \alpha),$$

o bien

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Esta es precisamente la ley que describe el movimiento de la proyección del punto M sobre el eje Oy. La proyección C se mueve de manera rectilínea por el eje Oy, oscilando alre-

dedor del punto O, es decir, desviándose ora hacia arriba, ora hacia abajo no más que la magnitud del radio. Por lo tanto, la proyección se mueve por el eje Oy entre los puntos B_1 y B.

● DEFINICION.. El movimiento por la ley

$$y = a \operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$$

se llama *oscilación armónica simple.*

Aclaremos el significado de las constantes que componen la ecuación

$$y = a \operatorname{sen} (\omega t + \alpha).$$

El parámetro a se llama *amplitud de la oscilación* y caracteriza la mayor desviación del punto oscilante del centro O. El argumento $\omega t + \alpha$ recibe el nombre de *fase* del punto oscilante C; α es la *fase inicial* de la oscilación. El tiempo T, durante el cual el punto M cumple una vuelta completa por la circunferencia, y por lo tanto, el punto C efectúa una oscilación completa y vuelve a la posición inicial, se llama *período de oscilación armónica.* Es evidente que

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La magnitud inversa al período de la oscilación, se llama *frecuencia de la oscilación*; la frecuencia

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Observación. La proyección del punto M, tomada sobre el eje Ox, efectúa también una oscilación armónica, si el punto M se mueve uniformemente por la circunferencia, pero sólo con otra fase inicial:

$$x = a \cos (\omega t + \alpha) = a \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} + \omega t + \alpha \right],$$

o bien

$$x = a \operatorname{sen} \Big(\omega t + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_{\alpha_1}\Big).$$

La gráfica de la oscilación armónica para el caso $a = 1{,}5$; $\omega = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ está representada en la fig. 103.

▲ **Ejercicios**

1. Hallar: 1) $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 1$; 5) $3 \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Hallar: 1) $\operatorname{arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\sqrt{3}$;

4) $2\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-1)$; 5) $\operatorname{arc}\cos 0$.

3. Calcular: 1) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{arc}\cos(-1)+\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-1)$;

3) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Construir los correspondientes ángulos (arcos):
1) $\operatorname{arc}\operatorname{sen} 0{,}6$; 2) $\operatorname{arc}\cos(-0{,}4)$; 3) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-0{,}3)$.

5. Expresar x como función de y de las siguientes igualdades:

1) $y=\operatorname{sen} x$, si $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 2) $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$,

si $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

3) $y=\cos 2x$, si $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

4) $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg} x$, si $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

5) $y=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si $-\pi<x<\pi$; 6) $y=\operatorname{ctg} 2x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$.

6. Expresar x como función de y de las igualdades:

1) $y=\operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$; 2) $y=2\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$;

3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x$; 4) $y=3\operatorname{sen} 2x$.

7. Calcular: 1) $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} 0{,}8)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc}\operatorname{sen} 1-\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc}\operatorname{sen} x)$ $(0<x<1)$; 4) $\cos\left(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{3}-\operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\right)$.

8. Demostrar el cumplimiento de las siguientes igualdades:

1) $2\operatorname{arc}\cos x=\operatorname{arc}\cos(2x^2-1)$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

2) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg} 3$;

3) $\operatorname{arc}\cos 0{,}6+\operatorname{arc}\cos 0{,}8=\operatorname{arc}\cos 0$.

9. Utilizando las notaciones de las funciones trigonométricas inversas, escribir la forma general de los ángulos, correspondientes al valor dado de la función trigonométrica:

1) $\operatorname{sen} x=\frac{2}{3}$; 2) $\operatorname{sen} 3x=-\frac{1}{4}$; 3) $\cos 2x=\frac{1}{5}$;

4) $\operatorname{tg} 2x=5$; 5) $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{5}$; 6) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{3}{7}$.

A d v e r t e n c i a. Si sen $2x=\frac{3}{5}$, tendremos que $2x=(-1)^k\times$ $\times\text{arc sen}\frac{3}{5}+\pi k$; $x=\frac{1}{2}(-1)^k\text{ arc sen}\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

10. Transformar en producto:
1) $\text{sen } 80°+\text{sen } 30°$; 2) $\text{sen } 3\alpha-\text{sen }\alpha$; 3) $\text{sen } 5+\text{sen } 3$;
4) $\cos 4x-\cos 2x$;
5) $\text{tg }\frac{3\pi}{5}+\text{tg }\frac{\pi}{5}$; 6) $\text{tg } 70°+\text{ctg } 40°$; 7) $\frac{1}{2}+\cos x$;
8) $\sqrt{3}+\text{tg } A$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{sen } 40°$; 10) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$;
11) $1+\text{sen } x+\cos x$; 12) $\cos x+\text{sen } 2x-\cos 3x$;
13) $\text{sen } A+\cos A$; 14) $3-4\cos^2 x$.

11. Representar en forma de suma las siguientes expresiones:
1) $2\text{ sen } 40°\cdot\cos 20°$; 2) $2\cos 70°\cdot\text{sen } 10°$; 3) $\text{sen } 3\alpha\cdot\cos\alpha$;
4) $\cos 5x\cdot\text{sen } 2x$; 5) $\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\text{sen }\frac{\pi}{8}\cdot\text{ sen }\frac{3\pi}{8}$;
7) $\text{sen }\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; 8) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

12. Demostrar las identidades:
1) $4\text{ sen }\alpha\cdot\text{sen }(60°-\alpha)\text{ sen }(60°+\alpha)=\text{sen } 3\alpha$;
2) $\text{sen } x+\cos x+1=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(45°-\frac{x}{2}\right)$;
3) $(\cos A+\cos B)^2+(\text{sen } A-\text{sen } B)^2=4\cos^2\frac{A+B}{2}$;
4) $\text{tg } 30°+\text{tg } 40°+\text{tg } 50°+\text{tg } 60°\frac{4\cos 20°}{\text{sen } 60°}$;
5) $\text{sen } 10°+2\text{ sen } 5°\cdot\cos 15°+\cos 50°=\cos 10°$;
6) $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\text{sen } 4\alpha\cdot\text{sen }\alpha=\cos 3\alpha\cos 2\alpha$;
7) $\text{sen }\alpha\text{ sen }(\beta-\gamma)+\text{sen }\beta\text{ sen }(\gamma-\alpha)+\text{sen }\gamma\text{ sen }(\alpha-\beta)=0$;
8) $\cos 10°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70°=\frac{\sqrt{3}}{8}$;
9) $1-4\cos^2\alpha=4\text{ sen }(60°+\alpha)\text{ sen }(\alpha-60°)$;
10) $1-\text{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;
11) $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$;
12) $\frac{\text{ctg }\alpha+1}{\text{ctg }\alpha-1}=\text{ctg }(45°-\alpha)$;
13) $\text{tg } 20°\cdot\text{tg } 40°\cdot\text{tg } 60°\cdot\text{tg } 80°=3$.

13. Resolver las ecuaciones:
1) $\text{sen } x+2\cos x=1$;
2) $\sqrt{3}\text{ sen } x+\cos x=1$;
3) $8\text{ sen } x-3\cos x=4$;

4) $\operatorname{sen} 2x=(\cos x-\operatorname{sen} x)^2$;

5) $\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=1$;

6) $\operatorname{sen} 3x=\cos 2x$.

Advertencia. $\cos 2x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$;

7) $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x=0$;

8) $\operatorname{sen}(x+45^\circ)\operatorname{sen}(x-15^\circ)=\frac{1}{2}$;

9) $\operatorname{sen} 3x\cos 5x=\operatorname{sen} 4x\cos 6x$;

10) $\operatorname{sen} 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\operatorname{sen} 3x$;

11) $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$;

12) $12\operatorname{sen} x+4\sqrt{3}\cos(x+\pi)=8\sqrt{3}$;

13) $8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{sen} x-4=0$;

14) $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x+\cos 3x=0$;

15) $\sec x=4\operatorname{sen} x+6\cos x$;

16) $3\cos x+5\operatorname{sen}\frac{x}{2}=-1$;

17) $\cos\frac{x}{2}+\cos x+\cos 2x=0$;

18) $\cos^2 x-2\sqrt{3}\cos x\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x=1$;

19) $\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+60^\circ)\times\operatorname{sen}(x+120^\circ)=\frac{1}{4}$;

20) $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\operatorname{sen} 3x=\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$;

21) $\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x}{\cos x-1}=1$;

22) $\operatorname{ctg} x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Advertencia. $y=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$;

23) $2\operatorname{sen} 3x+\sqrt{3}\cos 5x+\operatorname{sen} 5x=0$;

24) $\operatorname{sen}^2 4x-\operatorname{sen}^2 2x=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 3x$;

25) $\sec^2\frac{x}{2}-1=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sec x$;

26) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{ctg} x-1$;

27) $2(\cos x-\operatorname{sen} x)+10\cos x\operatorname{sen} x-5=0$;

28) $\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x=1$;

29) $\cos x+\operatorname{sen} x=\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$;

30) $\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg} x=0$;

31) $\operatorname{sen} 3x+4\operatorname{sen}^3 x+4\cos x=5$;

32) $2\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right]=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}$.

CAPITULO XII

PROGRESIONES

§ 141. Sucesión numérica

Ejemplo 1. Los postes telegráficos se ponen a una distancia de 50 m uno del otro. Expresar la longitud de la línea de comunicación S_n en función de la cantidad de postes instalados.

Es evidente que $S_n = 50\,(n-1)$.

Para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$S_n = 50$ m, 100 m, 150 m, 200 m, ...

Ejemplo 2. De la geometría se sabe que el número de todas las diagonales de un polígono convexo de n lados se determina por la fórmula $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, donde a_n es el número de diagonales en n ángulos. Dando a n los valores: 4, 5, 6, 7, 8, ... obtendremos los correspondientes valores de $a_n = 2, 5, 9, 14, 20, \ldots$

En los dos ejemplos examinados hemos obrado con funciones, cuyo argumento n puede adquirir solamente valores enteros positivos. Estas funciones se admiten en llamar funciones de argumento natural (de otro modo, funciones de argumento entero) y escribirlas brevemente (simbólicamente) así:

$a_n = f(n)$ ó $\{a_n\}$.

La particularidad esencial de la función de argumento natural es que el conjunto de sus valores se puede numerar y disponer en un orden determinado: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Aquí, en el primer lugar se encuentra el número $a_1 = f(1)$, en el segundo, el número $a_2 = f(2)$, en el tercero, $a_3 = f(3)$, etc. En este caso se dice que el conjunto de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *está ordenado*.

DEFINICION 1. El conjunto ordenado de valores de la función de argumento natural se llama *sucesión numérica*. En forma general una sucesión numérica se escribe así: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ El número a_1 se llama primer término de la sucesión, el número a_2, segundo término, etc. Veamos otros ejemplos de sucesiones.

E j e m p l o 3. Si se eleva al cuadrado cada número natural obtendremos una sucesión de cuadrados de números naturales $\{n^2\}$: 1, 4, 9, 16, 25, . . ., n^2, . . .
E j e m p l o 4. Para cada número natural n existe un número inverso a él $\frac{1}{n}$; estos números inversos forman la sucesión numérica $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

La sucesión se considera dada si se conoce la regla por la cual cada número natural n se encuentra en correspondencia con otro número a_n. De ordinario esta correspondencia se establece por la fórmula del término general de la sucesión, por ejemplo, $a_n = \frac{n}{2n+1}$. Esta fórmula da lugar a la sucesión $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \ldots$, Sin embargo, no toda sucesión numérica se puede dar por una fórmula. Así, por ejemplo, para la sucesión 3, 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; . . . no estamos en condición de indicar una fórmula que permite por el número del término de la sucesión determinar el propio término.
No obstante, la regla por la que están formados los términos de la sucesión, se expresa verbalmente con facilidad: el primer término de la sucesión es un valor aproximado del número π por defecto con la exactitud de hasta 1, el segundo término es un valor aproximado de π por defecto con la exactitud de hasta 0,1, etc. En general el n-simo término de la sucesión es un valor aproximado del número π por defecto con la exactitud de hasta $\frac{1}{10^{n-1}}$.
La sucesión 2, 3, 5, 7, 11, . . . es interesante ya que sus términos son números simples dispuestos en su orden de crecimiento. En primer lugar se encuentra el menor número simple 2; en segundo lugar, el siguiente número simple, es decir, el 3, etc. Esta sucesión se continúa fácilmente, disponiendo la tabla de números simples; sin esta tabla no estamos en condición de decir, por ejemplo, el término que se encuentra en el 1000-ésimo lugar, puesto que no hay una fórmula que exprese el n-simo número como función del número. Sin embargo, la regla verbal expresa exactamente la ley de formación de sus términos. A veces la sucesión se da por la fórmula de recurrencia, por ejemplo, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. El sentido de esta fórmula consiste en que cada

término (comenzando del tercero) se determina como suma de los dos términos anteriores próximos a él: $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, . . . Para que sea posible escribir esta sucesión hay que dar sus dos primeros términos. Supongamos que $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, en tal caso tendremos: $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 7$, $a_6 = 11$, etc.

● DEFINICION 2. La sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona creciente*, si cada término siguiente es mayor que el anterior,es decir, la desigualdad $a_{n+1} > a_n$ es cierta para todo n natural. En los ejemplos 1, 2, 3 ya nos hemos encontrado con la sucesión monótona creciente.

● DEFINICION 3. La sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona decreciente* si cada término siguiente es menos que el anterior, es decir, la desigualdad $a_{n+1} < a_n$ es cierta para todo n natural.

Un ejemplo de una sucesión monótona decreciente es

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Existen sucesiones cuyos términos ora crecen, ora decrecen· Estas sucesiones se llaman oscilantes o indeterminadas.

E j e m p l o. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n}{n+1}$.
Para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ obtenemos los términos de la sucesión

$$1, -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$$

Se nota fácilmente que $a_2 < a_1$, pero $a_3 > a_2$.
Los términos de esta sucesión crecen y decrecen alternativamente.

§ 142. Ilustración gráfica de una sucesión

Los términos de las sucesiones monótonas (es decir, sólo crecientes o sólo decrecientes) se representan cómodamente por puntos sobre un eje numérico; además, al crecer el punto se mueve hacia la derecha a medida que crece el número de término, lo que está representado en la fig. 107. Para la sucesión monótona decreciente el punto se mueve hacia la izquierda con el crecimiento del número de término.
Podemos proceder también de otro modo, admitiendo el número de cada término como abscisa, y la magnitud de ese término, como ordenada y construir los puntos $(1; a_1)$,

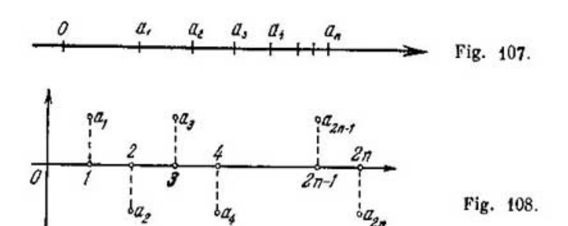

Fig. 107.

Fig. 108.

(2; a_2), (3; a_3), . . . etc. Se obtiene una serie de puntos aislados del plano o, como se dice, puntos discretos. Estos puntos, o dicho con rigor, sus ordenadas son las representaciones de los términos de la sucesión.

En la fig. 108 se muestra la sucesión $\{a_n\}$:1, -1, 1, ... En ésta $a_n = (-1)^{n+1}$. Si quisiésemos representar los términos de esta sucesión en forma de puntos sobre el eje numérico (eje de abscisas), tendríamos que la representación sería inexpresiva, puesto que los términos con números impares se representan por un punto $a_{2n+1} = 1$, y todos los términos con números pares se reúnen en otro punto $a_{2n} = -1$. En este ejemplo se puede notar la ventaja del segundo método de representación ante el primero.

§ 143. Progresión aritmética

Examinemos las siguientes dos sucesiones:

4, 7, 10, 13, 16, . . .,

8, 3, -2, -7, -12, . . .

Su ley de composición es la misma; la diferencia entre cualquier término de la sucesión y el próximo a él de izquierda (anterior) es una magnitud constante. En el primer ejemplo esta diferencia es igual a: $7-4 = 10-7 = \ldots = 3$; en el segundo ejemplo tendremos $3-8 = -2-3 = -5$.

● DEFINICION. Se llama *progresión aritmética* una sucesión de números, en la cual cada término siguiente se obtiene del anterior sumando a éste un mismo número denominado *diferencia de la progresión*. La diferencia de la progresión se designa por la letra d; por lo tanto, en el primer ejemplo $d = 3$; en el segundo ejemplo $d = -5$. Los términos de una progresion aritmética se designan por a_1, a_2, a_3, etc.; en el primer ejemplo $a_1 = 4$; $a_2 = 7$; $a_3 = 10$.

Si $d > 0$, la progresión es creciente; si $d < 0$, es decreciente.

Para demostrar que la sucesión dada es una progresión aritmética se le antepone el signo $\div$, por ejemplo: $\div$ 7, 9, 11, 13, . . .
Si $d = 0$, todos los términos de la progresión son iguales entre sí. El estudio de estas progresiones no presenta interés.

§ 144. Fórmula de cualquier término de una progresión aritmética

Por definición de la progresión tendremos

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$

Se puede notar la siguiente ley: para obtener un término de una progresión aritmética de número k hay que sumar al primer término la diferencia d multiplicada por el número de términos que preceden al que se determina:

$$a_k = a_1 + (k - 1)\, d \qquad (1)$$

(al término a_k le anteceden $(k - 1)$ términos). Por ahora ésta es nuestra suposición, pues aún no está demostrada la validez de la igualdad (1).
Demostremos que si la igualdad (1) es cierta, también es cierta la igualdad

$$a_{k+1} = a_1 + kd. \qquad (2)$$

En efecto,

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)\, d + d = a_1 + kd,$$

con lo que queda demostrada la validez de la igualdad (2).
Hemos comprobado directamente que para $k = 2$ y $k = 3$ la fórmula (1) es cierta, en tal caso, por demostración también es cierta cuando $k = 4$, y si lo es para $k = 4$, lo es también para $k = 5$, y en general, es cierta para todo $k = n$.
Por eso,

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

§ 145. Media aritmética

Supongamos que a_{k-1}, a_k, a_{k+1} son tres términos sucesivos de una progresión aritmética. En tal caso, por propiedad de la progresión tendremos:

$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k;$

$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1};$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Se llama *media aritmética* la semisuma de dos números; por lo tanto, *cualquier término de una progresión aritmética* (excepto el primero) *es la media aritmética de dos de sus términos contiguos.*

E j e m p l o. Intercalar 7 medias aritméticas entre los números 8 y 20. Esto significa que se deben hallar 7 números tales que junto con los números dados 8 y 20 formen una progresión aritmética; el primer término de esta progresión es el 8, el noveno, el número 20. Tendremos que

$$a_9 = a_1 + 8d;\ 20 = 8 + 8d,\ d = 1{,}5.$$

La progresión buscada será:

$$\div\, 8;\ 9{,}5;\ 11;\ 12{,}5;\ 14;\ 15{,}5;\ 17;\ 18{,}5;\ 20.$$

Este ejemplo se puede generalizar: si hay que intercalar k medias aritméticas entre los números a y b, tendremos que

$$b = a + (k+1)\,d,\quad d = \frac{b-a}{k+1}.$$

Conforme al primer término y la diferencia d se puede escribir los restantes términos.

§ 146. Fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

Señalemos previamente una propiedad de la progresión aritmética con un número finito de términos.
Supongamos tener la progresión

$$\div\, 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37.$$

Sumemos los términos equidistantes de los extremos de la progresión: $2 + 37 = 39$; $7 + 32 = 39$; $12 + 27 = 39$; $17 + 22 = 39$; notamos que *la suma de dos términos de una progresión aritmética equidistantes de los extremos es igual a la suma de los términos extremos.*
Así debe ser: los primeros sumandos de estas sumas (es decir, 2, 7, 12, 17) crecen en 5; en cambio los segundos sumandos (37, 32, 27, 22) decrecen en 5; debido a esto la suma de cada par de sumandos permanece constante.
Pasemos a la deducción de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Designemos esta suma por S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Si los sumandos del segundo miembro de la igualdad los escribimos en el orden inverso, la suma S_n no variará por ello:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), obtendremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots$$
$$\dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

En cada paréntesis tenemos una suma de dos términos equidistantes de los extremos de la progresión; por lo tanto, todas estas sumas entre paréntesis son iguales entre sí y cada una de ellas es igual a la suma de los términos extremos $a_1 + a_n$; en total son n paréntesis, es decir, tantos como términos de la progresión. Por eso, tendremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos.

Se se utiliza la expresión del término general de una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, la fórmula de la suma puede tomar otra forma:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n.$$

Es conveniente utilizar esta fórmula cuando hay que hallar el número de términos de una progresión según los datos a_1, d y S_n.

§ 147. Representación geométrica de la suma S_n

Demos la deducción geométrica de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Antes señalemos lo siguiente: si la base de un rectángulo es igual a la unidad, sú superficie se expresa por el mismo número que su altura..

Construyamos n rectángulos de alturas iguales a los términos de la progresión aritmética (fig. 109); la base de cada rectángulo es igual a la unidad: todos los rectángulos están

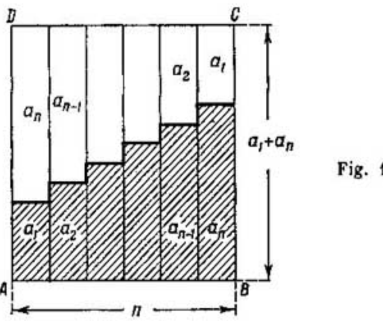


Fig. 109.

juntos uno a otro. Obtendremos una figura escalonada (en la figura se muestra rayada), cuya superficie numéricamente es igual a S_n. Si a la figura rayada se le yuxtapone una misma figura, pero dada vuelta, se obtendrá el rectángulo $ABCD$ de base $AB = n$, altura $AD = a_1 + a_n$; la superficie de la figura rayada es la mitad del rectángulo, es decir, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

§ 148. Ejemplos de empleo de la fórmula de la suma S_n

Ejemplo 1. Hallar la suma de los n primeros números de una serie natural. Tendremos: $a_1 = 1$; $a_n = n$; el número de términos también es igual a n; por la primera fórmula de la suma se puede escribir:

$$S_n = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Ejemplo 2. Hallar la suma de 10 términos de una progresión:

$\div$ 18; 14; 10; 6, . . .

En este caso $d = 14 - 18 = -4$; $a_1 = 18$; $n = 10$. Por la segunda fórmula de la suma tendremos:

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 18 + 9 \cdot (-4)}{2} \cdot 10; \quad S_{10} = 0.$$

Ejemplo 3. El cuarto término de la progresión es igual a 9, el noveno término, igual a -6. ¿Cuantos términos hay

que tomar para que su suma sea igual a 54?

$a_9 = -6$, ó $a_1 + 8d = -6$

$a_4 = 9$, ó $\underline{a_1 + 3d = 9}$

$5d = -15;$

$d = -3;$

$9 = a_1 + 3\cdot(-3);$

$a_1 = 18.$

Por la segunda fórmula de la suma tendremos:

$$54 = \frac{2\cdot 18 + (n-1)\cdot(-3)}{2}n;$$

$$108 = (36 - 3n + 3)\,n;$$

$$36 = (13 - n)\,n;$$

$$n^2 - 13n + 36 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtendremos

$n_1 = 4;\ n_2 = 9.$

Abmas respuestas satisfacen los datos del problema, lo que se aprecia al verificar:

$\div$ 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, −3, −6; $S_4 = 54;$

$S_9 = S_4 + 0 = 54$, puesto que la suma de los últimos cinco términos es igual a cero. Evidentemente, lo mismo ocurrirá si la progresión tiene términos de signos contrarios, pero iguales en valor absoluto.

§ 149. Suma de los cuadrados de los n primeros números de una serie natural

La suma de los n primeros números de una serie natural la designamos por S_1, y la suma de sus cuadrados por S_2, de manera que

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n;$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2.$$

Si en la identidad

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

damos sucesivamente a n los valores 1, 2, 3, 4, . . ., n,

obtendremos:

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$
$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1;$$
$$5^3 - 4^3 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1;$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2) + $$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + n,$$

o bien

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n. \qquad (3)$$

Pero

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Sustituyendo el valor de S_1 en la igualdad (3), obtendremos:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

de donde

$$6S_2 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n^2 - 3n - 2n = 2n^3 +$$
$$+ 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1);$$
$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De manera semejante se puede hallar la suma de los cubos de los n primeros números de una serie natural, si se parte de la identidad

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1;$$

obtendremos:

$$S_3 = \left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2 = S_1^2.$$

§ 150. Progresión geométrica

● DEFINICIÓN. Una sucesión de números, en la que cada término siguiente es igual al término anterior multiplicado por el mismo número, se llama *progresión geométrica*. Expondre-

mos ejemplos de progresiones geométricas

$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots;$

$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots;$

$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

Cada término de la primera sucesión, comenzando del segundo, es igual al anterior multiplicado por 2; en el segundo ejemplo el término siguiente se obtiene del anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$, en el tercer ejemplo, multiplicado por $-\frac{1}{2}$. El número por el que hay que multiplicar el término anterior para obtener el siguiente se llama *razón de la progresión*, y se designa por la letra q. Los términos de una progresión geométrica, análogamente a los términos de la progresión aritmética, los designaremos por a_1, a_2, a_3, etc. La progresión geométrica la vamos a designar por el signo $\div\!\!\div$, puesto ante sus términos.

Si la razón de la progresión q es mayor que 1, la progresión es creciente para $a_1 > 0$ y decreciente para $a_1 < 0$.

Si $q = 1$, todos los términos de la progresión geométrica son iguales entre sí. Estas progresiones no presentan interés. En los ejemplos antes citados, la primera progresión es creciente, la segunda, decreciente, y la tercera no es ni creciente ni decreciente (aquí el término consecutivo puede ser mayor o menor que el precedente).

§ 151. Fórmula de cualquier término de una progresión geométrica

Por definición de la progresión geométrica tendremos:

$$a_2 = a_1 q;$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2;$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3.$$

Se pone de manifiesto una ley determinada; para obtener un término de una progresión geométrica de número determinado, hay que multiplicar el primer término de la progresión por la razón de la progresión con exponente igual al número de términos precedentes. Supongamos que esta ley se cumple para el término de número k:

$$a_k = a_1 q^{k-1}; \qquad (1)$$

demostremos que, en tal caso,

$$a_{k+1} = a_1 q^k. \qquad (2)$$

En efecto, por definición de la progresión geométrica tendremos:

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k,$$

con lo que la igualdad (2) queda demostrada.
El cumplimiento de la igualdad (1) lo hemos verificado hasta el valor de $k = 4$. En tal caso, por demostración, también es cierta para $k = 5$, y si se cumple para $k = 5$, entonces también es cierta para $k = 6$, etc., y, en general es cierta para cualquier valor natural de $k = n$:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Todo término de una progresión geométrica es igual al primer término multiplicado por la razón de la progresión con exponente igual al número de términos precedentes al que se determina.

E j e m p l o 1. Determinar el 8° término de la progresión:

$$\div\div 1, 3, 9, 27, \ldots$$

En este ejemplo $a_1 = 1$; $q = 3$; por eso,

$$a_8 = a_1 q^7 = 1 \cdot 3^7 = 2187.$$

E j e m p l o 2. Hallar el 10° término de la progresión:

$$2, \ -\sqrt{2}, \ 1, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ldots$$

La razón $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1 = 2$.

$$a_{10} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = -2 \cdot \frac{2^4 \sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

§ 152. Media geométrica

Supongamos que a_{k-1}, a_k, a_{k+1} son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, donde el subíndice k es un número natural cualquiera mayor que 1. En tal caso tendremos:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k};$$

cada una de estas relaciones es igual a la razón de la progresión q. Por una propiedad de la proporción tendremos:

$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$.

El número cuyo cuadrado es igual al producto de dos números dados, se llama su *media geométrica*; por ejemplo, el número 6 es la media geométrica de los números 4 y 9, puesto que $6^2 = 4 \cdot 9$.
De este modo, *todo término de una progresión geométrica es la media geométrica de dos términos equidistantes a él.*

E j e m p l o. Intercalar entre los números 2 y 1458 cinco medias geométricas.
La condición del problema es: hallar cinco números tales que junto con los números dados 2 y 1458 formen una progresión geométrica cuyo 1[er] término sea $a_1 = 2$ y el 7° término $a_7 = 1458$.
Tendremos que:

$a_7 = a_1 q^6$;
$1458 = 2q^6$; $729 = q^6$;
$q = \sqrt[6]{729} = \pm 3$.

Son posibles dos progresiones:

$\div\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458

ó

$\div\!\div$ 2, −6, 18, −54, 162, −486, 1458.

§ 153. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

Designemos por S_n la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (1) por q; obtendremos:

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q; \qquad (2)$$

puesto que

$a_1 q = a_2$, $a_2 q = a_3$, . . ., $a_{n-1} q = a_n$,

la igualdad (2) toma la forma

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q. \qquad (3)$$

Restamos de la igualdad (3) la igualdad (1):

$$S_nq - S_n = a_nq - a_1,$$

$$S_n(q-1) = a_nq - a_1,$$

de donde

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \quad (q \neq 1).$$

La fórmula de la suma se puede representar en otra forma, si en ella se sustituye a_n por a_1q^{n-1}; obtendremos:

$$S_n = \frac{a_1q^{n-1}q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1};$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad (q \neq 1).$$

Si la razón de la progresión es $|q| < 1$, es conveniente escribir la fórmula del siguiente modo:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

para que el numerador y el denominador de este cociente sean positivos para $a_1 > 0$.

Resolvamos un viejo problema del siglo XVIII.

► Problema. Cierta persona vende su caballo con la condición de que por el primer clavo de la herradura se le pague 1 céntimo; por el segundo clavo, 2 céntimos; por el tercero, 4 céntimos, etc. Los clavos de las herraduras son 32. Se pregunta: ¿a cuánto valora su caballo?

Evidentemente, hay que hallar la suma de los 32 términos de la progresión geométrica, cuyo primer término es $a_1 = 1$; la razón $q = 2$;

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31};$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 2^{31} - 1}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \text{ (céntimos)}.$$

Convertidos en rublos, esta cifra es aproximadamente de 2,15 millones de rublos (¡precio fantástico!).

Ejemplo. La suma de los tres primeros términos de una progresión es igual a 6, y la suma de 2°, 3° y 4° términos es igual a -3. Hallar la progresión. Escribimos los datos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6;$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = -3.$$

Expresando los términos de la progresión por el primero, obtendremos

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6, \text{ ó } a_1(1 + q + q^2) = 6; \quad (4)$$

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3 \text{ ó } a_1q(1 + q + q^2) = -3. \quad (5)$$

Dividimos la igualdad (5) por la igualdad (4), obtendremos: $q = -\frac{1}{2}$. El primer término lo hallamos de la correlación

$$a_1 = \frac{6}{1+q+q^2} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8.$$

La progresión buscada es: $+8; -4; 2; -1; \ldots$

§ 154. Método de inducción matemática

Al deducir la fórmula de cualquier término de las progresiones aritméticas y geométricas hemos aplicado los razonamientos que llevan el nombre de *método de inducción matemática*. La esencia de este método es la siguiente: si hay que establecer que una fórmula, en la que figura el número natural n, es cierta, entonces:

1) comprobamos que la ley supuesta se cumple para el caso particular de $n = 1$;

2) suponemos que la ley se satisface para cualquier valor arbitrario de $n = k$, y demostramos que, en este caso, ella es cierta también para $n = k + 1$; de aquí se deduce que la ley es en general cierta para cualquier valor de n, puesto que su validez se puso de manifiesto para $n = 1$, y por demostración ella es cierta también para $n = 2$, y si es cierta para $n = 2$, también lo es para $n = 3$, etc.

En ciertos casos estos razonamientos se llaman método de demostración de n a $n + 1$. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Demostrar que para cualquier valor natural de n se cumple la igualdad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La fórmula es cierta para $n = 1$, puesto que

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6} = 1; \quad 1 = 1.$$

Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Demostramos que, en ese caso, ella es cierta también para $n = k + 1$, es decir,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

En realidad,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\,\frac{2k^2+k+6k+6}{6} =$$

$$= (k+1)\,\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

puesto que $2k^2 + 7k + 6 = (k + 2)(2k + 3)$.

La verificación directa ha demostrado que la fórmula es cierta para $n = 1$; por demostración será también cierta para $n = 2$, y, por eso, también para $n = 3$, por lo tanto, y para $n = 4$; y, en general para cualquier n natural.

§ 155. Problemas de progresión

▶ Problema 1. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo. El primero recorre 10 m por segundo, y el segundo recorrió 3 m en el primer segundo; en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran?

Supongamos que el encuentro se produce después de x segundos, en tal caso el primer cuerpo recorrió un camino igual a $10x$ (m), el segundo cuerpo recorrió un camino igual a la suma de los términos de la progresión aritmética:

$S = 3 + (3 + 5) + (3 + 5\cdot 2) + \ldots + [3 + 5(x - 1)]$. Por los datos del problema $10x + S = 153$, ó $10x + \frac{5x+1}{2}x = 153$.

Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos que $x = 6$.

▶ Problema 2. ¿Pueden los números que expresan las longitudes de los lados de un triángulo y su perímetro, formar una progresión aritmética?

Supongamos que las longitudes de los lados forman una progresión aritmética, en ese caso se los puede designar por a, $a + d$, $a + 2d$, siendo su perímetro igual a $3a + 3d$. La diferencia entre el perímentro y el lado mayor es $(3a + 3d) - (a + 2d) = 2a + d$, y, puesto que $2a + d > d$, el perímetro no es el cuarto término de la progresión aritmética.

▶ Problema 3. Cuatro números forman una progresión geométrica decreciente. Sabiendo que la suma de los términos extremos es igual a 27, y la suma de los términos medios, igual a 18, hallar esa progresión.
Tengamos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 27, \\ a_1q + a_1q^2 = 9. \end{cases}$$

Dividamos la primera ecuación por la segunda: $\frac{1-q+q^2}{q} = 3$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos $q = 2 \pm \sqrt{3}$. Solamente $q = 2 - \sqrt{3}$ satisface las condiciones del problema dado, puesto que la progresión debe ser decreciente y, por eso, $|q| < 1$. El primer término de la progresión lo hallamos de la correlación $a_1(q + q^2) = 9$, $a_1 = \frac{3}{2} \cdot (9 + 5\sqrt{3})$.

▶ Problema 4. La suma de tres números positivos, que forman una progresión aritmética, es igual a 21. Si a estos números les sumamos respectivamente 2, 3 y 9, los nuevos números forman una progresión geométrica. Hallar esos números. Supongamos que x, y y z son los números buscados. En tal caso $x + y + z = 21$, y, puesto que los números x, y, z forman una progresión aritmética, tendremos que $2y = x + z$. Por las condiciones del problema $x + 2$, $y + 3$, $z + 9$ componen una progresión geométrica, es decir, $(y + 3)^2 = (x + 2) \cdot (z + 9)$.
Se obtuvo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 21. \\ 2y = x + z, \\ (y + 3)^2 = (x + 2)(z + 9). \end{cases}$$

De la primera ecuación hallamos que $x + z = 21 - y$, entonces la segunda ecuación toma la forma $2y = 21 - y$; $y = 7$. Sustituyendo en la tercera ecuación y por su valor 7, obtendremos $(x + 2)(z + 9) = 100$, pero, dado que $x + z = 14$, $z = 14 - x$, entonces

$$(x + 2)(14 - x + 9) = 100.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos $x_1 = 3$; $x_2 = 18$. El segundo valor $x_2 = 18$ no nos sirve, puesto que la suma de los primeros números $x + y$ excede la suma de los tres, lo que no es admisible, puesto que los tres números son positivos. Así, pues, los números buscados son: 3, 7 y 11.

▲ **Ejercicios**

1. Escribir varios de los primeros términos de una sucesión, si el término general se expresa por la fórmula $a_n = \frac{1}{n+1}$.

2. Idem para cuando: 1) $a_n = \frac{1}{3n+1}$; 2) $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$; 3) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$; 4) $a_n\ (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Escoger, en lo posible, una fórmula simple para el término general de las siguientes sucesiones: 1) 1, 3, 5, 7, 9, ...; 2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, ...; 3) a^2, a^4, a^6, ...

4. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son una progresión aritmética: 1) 3, 6, 9, 12, ... ; 2) 1, 8, 27, 64, ... 3) 1, 3, 7, 15, 31, ...; 4) 5, 3, 1, −1, −3, ... ?

5. Dada la progresión

$\div$ 3, 7, 11, 15, ... ,

hallar: 1) el 7° término; 2) el k-ésimo término.

6. En la progresión

$\div$ 5, 2, −1, −4, ... ,

hallar: 1) a_{12}; 2) a_n.

7. Hallar el término general de la progresión

$\div 3b, 5b, 7b, \ldots\ (b \neq 0)$.

8. Dada la progresión

$\div$ 3, 5, 7, 9, ... ,

¿cuál es la sucesión de números que forman los términos que quedan si se suprimen en ella los términos situados en los lugares pares?

9. Intercalar 8 medias aritméticas entre los números 4 y 40.

10. Los diámetros de las poleas asentadas en un eje común forman una progresión aritmética de cinco términos, cuyos términos extremos son iguales a 120 mm y 216 mm; hallar los diámetros de las poleas intermedias.

11. Hallar la suma de 12 términos de la progresión

$\div$ 4, 8, 12, 16, ...

12. ¿Cuántas veces suena un reloj por día si éste suena también en las medias horas?

13. Demostrar que la suma de los n primeros números impares es un cuadrado exacto.

14. Completar los lugares vacíos de la tabla en la pág. 295.

15. La suma del 2° y 5° términos de una progresión es igual a 14, la suma del 3° y 7° es igual a 8; hallar la progresión.

16. La suma del 3° y 6° términos de una progresión es igual a 3, y la suma de sus cuadrados es igual a 45; hallar la progresión.

17. Kupetsky es una persona que tiene 14 copitas de plata, cada una de las cuales se diferencia en 4 medias onzas según una progresión, la última pesa 59 medias onzas; hallar el peso de todas las copitas (de la aritmética de Magnitsky, año 1703).

	a_1	a_n	d	n	S_n
1	7	39		9	
2	8		−2		14
3	31		−7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9400
6	2		3		442
7		22	0,4	43	
8		25,7	1,3		266
9	−4,5	100			955
10		−15		11	0

18. Un cuerpo que cae libremente en el vacío recorre en el primer segundo aproximadamente 4,9 m, y en cada segundo siguiente 9,8 m más. ¿Qué camino recorre el cuerpo en 10 segundos? ¿Qué camino ha recorrido en el último segundo?

19. ¿Cuál es el número natural igual a la suma de todos los números naturales que le anteceden?

20. La suma de tres números que componen una progresión aritmética es igual a 16. El producto del primero por el segundo es igual a $12\frac{4}{9}$. Hallar esos números.

21. El sexto término de una progresión aritmética constituye el 60% del tercer término de la misma progresión, y su producto es igual a 15. ¿Cuántos términos hay que tomar de esta progresión para que su suma sea igual a $30\frac{1}{3}$?

22. Se ha dado la progresión

$\div$ 3; 3,2; 3,4; 3,6; . . .

¿Comenzando de qué número sus términos serán mayores de 1000?

23. Demostrar que la sucesión, cuyo término general se expresa por la fórmula $a_n = 2\cdot 3^n$, es una progresión geométrica. Escribir los primeros cuatro términos de esta progresión.

24. Determinar el 10° término de la progresión

$\div\div$ 2, 4, 8, . . .

25. ¿A qué es igual el 7° término de la progresión

$\div\div$ 15, -5, $\frac{5}{3}$, . . . ?

26. ¿A qué es igual la razón de la progresión geométrica

1) 2, $\sqrt{2}$, 1, . . . ; 2) a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, . . . $(a > 0)$?

27. Intercalar tres medias geométricas entre los números 12 y 972.

28. Intercalar cuatro medias geométricas entre los números 5 y 20.

29. Hallar la suma de diez términos de una progresión, si

1) $a_1 = 3$; $q = 2$; 2) $a_1 = 8$; $q = \frac{1}{4}$.

30. Hallar la razón y la suma de siete términos de la progresión geométrica, si $a_1 = 36$; $a_7 = \frac{4}{81}$

31. Dados $S_7 = 2186$, $q = 3$; hallar a_1 y a_7.

32. Hallar el número de términos de la progresión geométrica, si $a_1 = 3$; $q = 2$; $S_n = 189$.

33. Hallar la razón de la progresión, siendo $a = 1$; $n = 3$; $S_3 = 157$.

34. Dada la progresión geométrica, en la que

$a_1 + a_2 = 9$; $a_1 - q = 2\frac{3}{4}$,

hallar a_3.

35. La suma de tres números que componen una progresión geométrica creciente es igual a 65. Si restamos del menor número 1, del mayor 19, los números nuevamente obtenidos componen una progresión aritmética. Hallar estos números.

36. Hallar cuatro números sabiendo que los tres primeros de ellos componen una progresión geométrica, y las últimas tres, una aritmética. Se sabe que $q = 2$; $d = 6$.

37. Hallar cuatro números positivos que componen una progresión geométrica, si $a_1 + a_2 = 15$; $a_3 + a_4 = 60$.

38. Demostrar que si tres números positivos a, b y c forman una progresión geométrica, entonces

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3.$$

39. Un cuerpo se mueve por una recta uniformemente acelerado. El camino recorrido en el primer segundo es de 1 m; en el segundo, de 1,2 m; en el tercero, de 1,4 m. De este modo, el camino recorrido en cada segundo siguiente es 0,2 m mayor. ¿Cuál será el camino recorrido por el cuerpo al final de dos minutos desde el instante de comenzar el movimiento?

40. Desde los puntos A y B se mueven simultáneamente dos cuerpos, uno al encuentro del otro. El primero de ellos recorre en el primer minuto 50 m, y en cada minuto siguiente dos metros más que en el precedente. El segundo cuerpo recorre en el primer minuto 40 m, y en cada minuto siguiente 4 m más que en el precedente. ¿Después de cuántos minutos se encuentran estos dos cuerpos si la distancia $AB = 510$ m? Dar la resolución gráfica del problema.

41. Resuélvase analítica y gráficamente el siguiente problema: Desde el punto A parte un ciclista. Supongamos que en el primer segundo haya recorrido 3,5 m, y en cada segundo siguiente de movimiento el camino recorrido aumenta 1 m en comparación con lo recorrido en el precedente. Tres segundos después, del mismo punto A y en la misma dirección parte el segundo ciclista. En el primer segundo éste recorre 4 m, y en cada segundo siguiente recorre 2 m más que en el precedente. ¿Después de cuántos segundos el segundo ciclista alcanza al primero y a qué distancia del lugar de partida ocurre esto?

42. Tres números positivos: a, aq, aq^2, que forman una progresión geométrica, pueden ser tomadas como longitud de los lados de un rectángulo. ¿En qué límites puede variar la razón de la progresión q? Examínese los dos casos:

1) $q > 1$ y 2) $0 < q < 1$.

CAPITULO XIII

FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMOS

§ 156. Potencia de exponente irracional

En el cap. V se generalizó y extendió el concepto de potencia a cualquier exponente racional. Así, por ejemplo,

$a^{3/2} = \sqrt{a^3}$; $a^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Sin embargo, no hemos examinado el caso en que el exponente es un número irracional, lo que denota el símbolo a^α (α es el número irracional, $a > 0$; $a \neq 1$).

Sin examinar esta cuestión en forma general, aclaremos el sentido de este nuevo símbolo en el ejemplo de la expresión $2^{\sqrt{2}}$.

Al número irracional $\sqrt{2}$ se puede aproximar por dos sucesiones de números racionales:

(I) 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .

o bien

(II) 2; 1,5; 1,42; 1,415; . . .

La primera sucesión es monótona creciente; sus términos son valores aproximados de la raíz cuadrada de dos por defecto, tomados con el grado de exactitud creciente.

La segunda sucesión es monótona decreciente; sus términos son valores aproximados de la raíz cuadrada de dos por exceso; además, la exactitud de la aproximación crece a medida que crece el número de términos de la sucesión.

Formemos dos nuevas sucesiones:

(I′) 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; . . .,

(II′) 2^2; $1^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; . . .

La primera de las nuevas sucesiones también es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.

Se puede demostrar que ambas sucesiones tienden a un mismo número con el crecimiento ilimitado del número de términos de la sucesión. Este número se toma (por definición) como valor de $2^{\sqrt{2}}$.

Observación. Con las potencias de exponentes irracionales se opera según las mismas leyes que con las potencias de exponentes racionales, por ejemplo:

$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$,

$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$, etc.

(α y β son dos números irracionales).

§ 157. Función exponenical

En muchos campos de la ciencia y la técnica al estudiar los fenómenos y procesos más variados se descubre una dependencia funcional común entre dos magnitudes variables que intervienen en el proceso dado. Veamos algunos ejemplos.

1) Con la variación de la altura h sobre el nivel del mar la presión atmosférica p varía según la ley: $p = p_0 a^h$, donde p_0 es la presión sobre el nivel del mar, a es una magnitud constante.

2) El crecimiento de un árbol se produce por la ley $A = A_0 a^{kt}$, donde t es el tiempo, A_0 es la cantidad de madera inicial, A es la cantidad de madera variable con el tiempo, expresada generalmente en m^3.

3) La reproducción de bacterias en un cultivo cualquiera (por ejemplo, en levadura de cerveza) se produce por la ley: $y = y_0 a^{kt}$, donde t es el tiempo, y es la cantidad variable de bacterias, y_0 es la cantidad inicial de bacterias en el instante $t = 0$, a y k son constantes.

4) El radio se desintegra por la ley: $x = x_0 a^{kt}$; aquí x_0 denota la cantidad inicial de radio para $t = 0$, a y k son números constantes.

En los ejemplos expuestos hemos tratado con procesos que llevan el nombre de proceso de *crecimiento orgánico*. Si nos abstraemos del sentido físico de las variables que intervienen en los procesos de crecimiento ogránico, y designamos estas variables por las letras x e y, se puede decir que todo crecimiento orgánico se representa (describe) por una función del tipo

$$y = Ca^{kx}.$$

Veamos al principio el caso elemental de tal función, cuando $C = k = 1$; luego $y = a^x$.

DEFINICIÓN. La función de tipo $y = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama *exponencial*.

El estudio de esta función lo comenzamos construyendo su gráfica:

§ 158. Gráficas de las funciones exponenciales

Formemos la tabla de valores de las siguientes funciones exponenciales:

$$y=2^x \quad (a=2); \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \left(a=\frac{1}{2}\right);$$

$$y=10^x \quad (a=10); \quad y=\left(\frac{1}{10}\right)^x \quad \left(a=\frac{1}{10}\right).$$

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
I	$y=2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16					
I	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$					
II	x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	1
II	$y=10^x$	0,1	0,18	0,3	0,4	0,6	0,7	1	1,3	1,8	2,4	3,2	4,2	5,6	10
II	$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	2,4	1,8	1,2	1	0,7	0,6	0,4	0,3	0,24	0,18	0,1

La segunda parte de la tabla está compuesta del siguiente modo. Los valores positivos del argumento x forman una progresión aritmética de diferencia $d=\frac{1}{8}$; los valores de la función exponencial 10^x, en este caso componen una progresión geométrica de razón $q=10^{1/8}$.

1) $10^{1/2}=\sqrt{10}\approx 3{,}16$;

2 $10^{1/4}=\sqrt{10^{1/2}}\approx\sqrt{3{,}16}\approx 1{,}78$;

3) $10^{1/8}=\sqrt{10^{1/4}}\approx\sqrt{1{,}78}\approx 1{,}33 \quad (q=1{,}33)$.

Las restantes potencias las hallamos por multiplicación:

4) $10^{\frac{3}{8}}=10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}\approx 1{,}78\cdot 1{,}33\approx 2{,}37$, etc.

Para los valores negativos de los exponentes conviene utilizar las magnitudes inversas $\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{1}{3{,}16}\approx 0{,}316;\; 10^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{10^{\frac{3}{8}}}\approx\frac{1}{2{,}37}\approx 0{,}422, \text{ etc.}$$

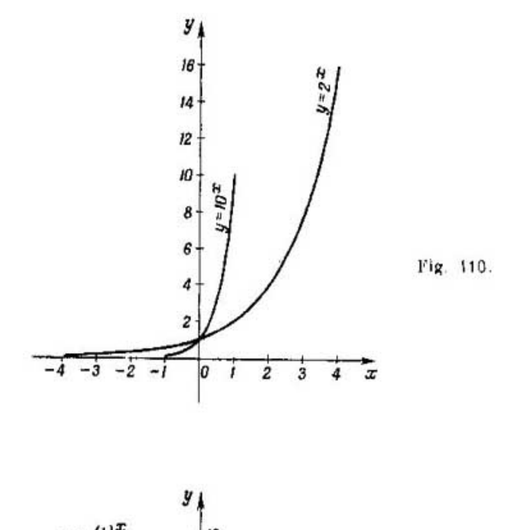


Fig. 110.

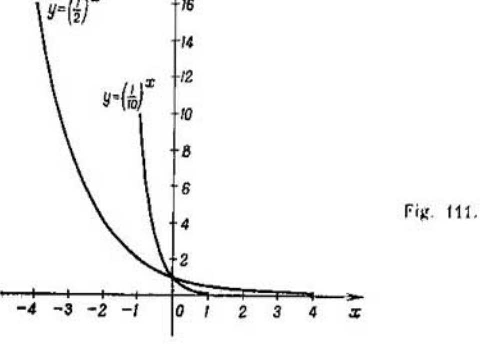


Fig. 111.

Los resultados redondeados con una cifra decimal han sido llevados a la tabla.

A base de las tablas compuestas en las figs. 110 y 111 se han construido las gráficas de estas cuatro funciones exponenciales en una misma escala.

§ 159. Propiedades de la función exponencial

Las gráficas construidas de las funciones exponenciales ilustran las siguientes propiedades de la función exponencial, las que admitimos sin demostración:

1) La función exponencial es positiva para cualquier valor del argumento (la gráfica está dispuesta encima del eje Ox).

2) Si la base $a > 1$ la función exponencial crece con el aumento del argumento x; además, $a^x < 1$ para $x < 0$ y $a^x > 1$ para $x > 0$.

3) Si la base es positiva $a < 1$, la función exponencial a^x decrece con el aumento del argumento x; además, $a^x > 1$ para $x < 0$ y $a^x < 1$ para $x > 0$.

4) Para cualquier base positiva $a^x = 1$, si $x = 0$ (todas las curvas intersecan el eje de ordenadas en un mismo punto (0; 1).

5) Si $a > 1$ la función a crece tanto más rápidamente cuanto mayor sea a (la curva $y = 10^x$ sube más rápidamente que $y = 2^x$).

6) Para un crecimiento ilimitado del argumento x, la función a^x $(a > 1)$ puede tomar valores tan grandes como se quiera.

Aunque esta propiedad no se deduce directamente del dibujo, se ve fácilmente que para

$x = 1, 2, 3, 4, 5,$

etc., la función

$10^x = 10, 100, 1000 \quad 10\,000, 100\,000,$ etc.

Esta propiedad de la función exponencial se expresa brevemente con la notación convencional: $y \to \infty$ para $x \to \infty$, donde el signo $\to \infty$ es el símbolo de crecimiento ilimitado de la variable; la frase «x tiende a infinito» significa el crecimiento ilimitado de la variable x.

7) Para valores negativos y grandes, en valor absoluto, del argumento, la función a^x $(a > 1)$ puede adquirir valores tan pequeños como se quiera, por ejemplo, cuando $x = -8$

$10^{-8} = 0{,}00000001.$

Esta propiedad se expresa brevemente con la notación convencional: $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$ $(a > 1)$.

8) Si $a < 1$, entonces $a^x \to 0$ para $x \to \infty$ y $a^x \to \infty$ para $x \to -\infty$.

§ 160. Gráfica de la función exponencial $y = Ca^{kx}$

Como se señaló en el § 157, los procesos de crecimiento orgánico se representan por una función exponencial de tipo $y = Ca^{kx}$.

Construyamos la gráfica de esta función para valores particulares de los parámetros:

$C = 3$; $a = 2$; $k = 0{,}4$.

Luego $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$.

Compongamos la tabla de valores en la que los valores de x forman una progresión aritmética; en tal caso los valores de la función y (calculado con la exactitud de hasta 0,1) forman una progresión geométrica:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 3 \cdot 2^{0,4x}$	1	1,3	1,7	2,3	3	4,0	5,2	6,9	9	...

Los valores de la función están calculados mediante las tablas. La gráfica está representada en la fig. 112. Comparándola con la gráfica de la función $y = 2$ (fig. 110) se puede decir que el carácter general de ambas curvas es el mismo: ambas funciones son crecientes en todo el eje numérico y para ningún valor de x no adquieren valores negativos. Sin embargo, el ritmo de crecimiento de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ retarda con respecto al ritmo de crecimiento de la función $y = 2^x$, lo que está motivado por el factor $k = 0{,}4$ en el exponente, menor que la unidad.

Mediante la gráfica de $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ se puede resolver la ecuación, por ejemplo:

$$3 \cdot 2^{0,4x} + \frac{4}{3}x - 1 = 0.$$

Para ello es suficiente representar la ecuación en la forma

$$3 \cdot 2^{0,4x} = -\frac{4}{3}x + 1$$

y trazar la recta $y = -\frac{4}{3}x + 1$, que corta la curva $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ en el punto M; la abscisa del punto M nos da el valor aproximado de la raíz de la ecuación dada, la que es igual a -1 (fig. 112).

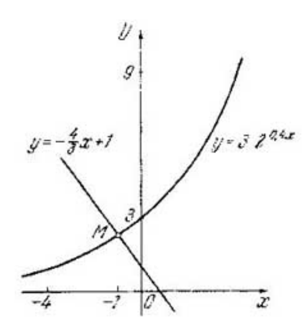


Fig. 112.

Observación. La función $y = Ca^{kx+b}$ se reduce a la forma $y = Aa^{kx}$, puesto que $Ca^{kx+b} = Ca^{kx} \cdot a^b = Aa^{kx}$, donde $A = C \cdot a^b$.

§ 161. Noción de logaritmo

Al formar la tabla de los valores de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ (§ 160) surgió una dificultad: ¿cómo calcular por el valor dado de x, por ejemplo, para $x = 1$, el correspondiente valor de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4 \cdot 1} = 3 \cdot 2^{2/5} = 3\sqrt[5]{2^2}$? El problema es que no existen tablas para la extracción de la raíz 5^a de un número.

Esta dificultad se puede vencer estudiando la variación del exponente en función de la magnitud de la misma potencia, pero esto requiere la introducción de un nuevo concepto matemático. Supongamos dada la igualdad $a^c = b$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq 1$.

● DEFINICION. Se llama *logaritmo de un número b respecto de la base a* el exponente c a que hay que elevar la base a para obtener el número b. La notación $\log_a b = c$ se lee del siguiente modo: el logaritmo del número b de base a es igual a c. El número que sirve de base del logaritmo se escribe debajo del renglón.

De las igualdades	se deduce que
$2^5 = 32$,	$5 = \log_2 32$,
$10^2 = 100$,	$2 = \log_{10} 100$,
$3^4 = 81$,	$4 = \log_3 81$,

$$5^3 = 125, \qquad 3 = \log_5 125,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \qquad -3 = \log_{\frac{1}{2}} 8,$$

$$a^c = b, \qquad c = \log_a b.$$

Las igualdades de ambas columnas son equivalentes: las primeras determinan las segundas igualdades y viceversa.

De la definición de logaritmo se deduce que

$$a^{\log_a b} = b.$$

Por ejemplo, $2^{\log_2 32} = 32$; $10^{\log_{10} 100} = 100$.

Examinemos la resolución de ejemplos de tipo

1) $a^x = b$; 2) $x^n = b$; 3) $a^c = x$,

donde por dos números dados hay que hallar el tercero.

E j e m p l o 1. ¿A qué es igual el logaritmo del número 27 de base 9?

$\log_9 27 = x$, $9^x = 27$;

$(3^2)^x = 3^3$, $3^{2x} = 3^3$, de donde $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$.

E j e m p l o 2. ¿Cuál es la base del logaritmo de 8 si éste es igual a 6? Tenemos que:

$\log_x 8 = 6$;

$x^6 = 8$; $x = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

E j e m p l o 3. Hallar el número cuyo logaritmo de base 64 es igual a $-2/3$.

Designando el número buscado por x, tendremos que $\log_{64} x = -2/3$, de donde

$$64^{-\frac{2}{3}} = x, \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{1}{16}; \quad x = \frac{1}{16}.$$

§ 162. Función logarítmica y su gráfica

● DEFINICION. La función inversa a la función exponencial se llama *logarítmica*.

Si $y = a^x$ ($a > 0$ y $a \neq 1$), entonces

$x = \log_a y$,

o, cambiando la designación del argumento y de la función

$y = \log_a x$.

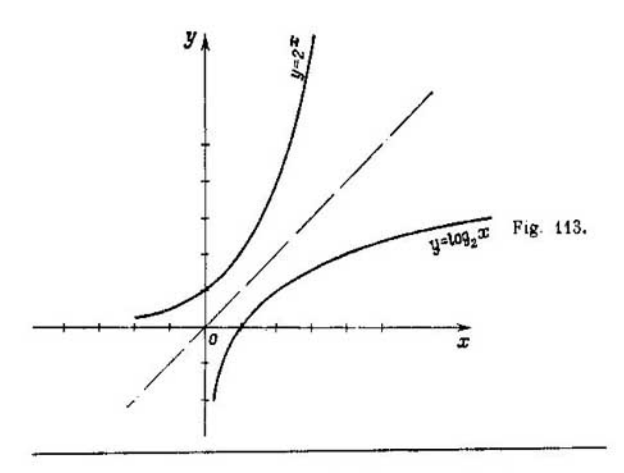


Fig. 113.

La gráfica de la función logarítmica se puede obtener por la regla general de la gráfica de la función exponencial, si se dobla la figura por la bisectriz de los ángulos de coordenadas primero y tercero.
En la fig. 113 se muestran las gráficas de la función exponencial $y = 2^x$ y de su inversa, la función $y = \log_2 x$.

§ 163. Propiedades de la función logarítmica

A cada propiedad de la función exponencial corresponde una propiedad determinada de la función logarítmica, lo que se puede apreciar de las siguientes comparaciones:

Función exponencial	*Función logarítmica*
1. La función exponencial es positiva para cualquier valor del argumento x.	1. La función logarítmica tiene valores reales sólo para valores positivos del argumento (la gráfica se encuentra a la derecha del eje de ordenadas).
2. Para $x = 0$ la función exponencial es igual a 1.	2. El logaritmo de 1 de cualquier base es 0.
3. Para valores negativos del argumento x la función $a^x < 1$	3. Los logaritmos de los números menores que 1, de base $a > 1$ son negativos; además

20-0267

$(a > 1)$; además $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$.	$\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0$.
4. La función exponencial crece y $a^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ $(a > 1)$.	4. La función logarítmica crece; además, $\log_a x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ $(a > 1)$.

§ 164. Significado práctico de los logaritmos

Formemos la tabla de potencias enteras del número 2:

Exponente n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Potencia 2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048

Exponento n	12	13	14	15	16	17
Potencia 2^n	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072

Exponente n	18	19	20	21
Potencia 2^n	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Conviene hacer notar que en la primera y tercera líneas de la tabla se han dado los logaritmos de base 2 de los números de las segunda y cuarta líneas. Así, por ejemplo, $11 = \log_2 \cdot 2048$.

Mediante esta tabla rápidamente se puede multiplicar, dividir, elevar a potencia y extraer la raíz de los números puestos en las líneas con la notación «2^n», por ejemplo:

1) El producto de 2048 por 256 se puede sustituir por la suma de los correspondientes exponentes $(11 + 8 = 19)$, de acuerdo a este exponente buscamos el número y obtenemos:

$$2048 \cdot 256 = 524\,288.$$

2) El cociente de 1 048 576 por 32 768 se sustituye por la sustracción de los exponentes $(20 - 15 = 5)$ y buscamos de acuerdo a esta diferencia el número (32), es decir,

$$1\,048\,576 : 32\,768 = 32.$$

3) La potenciación de 128^3 puede ser realizada por multiplicación del exponente (7) correspondiente a la base por 3:

$7 \cdot 3 = 21$;

al exponente 21 corresponde el número 2 097 152:

$128^3 = 2\ 097\ 152$.

4) La radicación, por ejemplo, de $\sqrt{1\ 048\ 576}$ se reduce a la división del exponente (20) por el índice de la raíz (2):

$\sqrt{1\ 048\ 576} = 1\ 024$.

En los cuatro casos las voluminosas operaciones con los mismos números las hemos sustituido por operaciones más simples con sus logaritmos.

§ 165. Propiedades generales de los logaritmos

1. *El logaritmo de un producto de dos o varios números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*
Supongamos que N y N_1 son dos números positivos, luego por definición de logaritmo tendremos:

$$N = a^{\log_a N}, \quad N_1 = a^{\log_a N_1}. \tag{1}$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos:

$$NN_1 = a^{\log_a N + \log_a N_1},$$

de donde

$$\log_a (NN_1) = \log_a N + \log_a N_1.$$

2. *El logaritmo de un cociente o una fracción es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*
Dividamos miembro a miembro la primera de las igualdades (1) por la segunda, recordando que al dividir potencias de igual base los exponentes se restan: $\frac{N}{N_1} = a^{\log_a N - \log_a N_1}$,

de donde

$$\log_a \frac{N}{N_1} = \log_a N - \log_a N_1.$$

3. *El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.*
En efecto, si ambos miembros de la identidad $N = a^{\log_a N}$ los elevamos a la n-ésima potencia, obtendremos $N^n =$

$= a^{n \log_a N}$, de donde

$\log_a (N^n) = n \cdot \log_a N.$

4. *El logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.*
En efecto, si se extrae la raíz n-ésima de ambos miembros de la igualdad $N = a^{\log_a N}$, tendremos que

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^{\log_a N}} = a^{\frac{1}{n} \log_a N}.$$

Por lo tanto,

$$\log_a (\sqrt[n]{N}) = \frac{1}{n} \log_a N.$$

Las propiedades obtenidas se llaman generales, puesto que ellas no dependen de la base a (siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$).

§ 166. Ejemplos de logaritmación del producto y del cociente

A base de las cuatro propiedades establecidas en el párrafo anterior, el logaritmo de cualquier expresión monomia puede expresarse por los logaritmos de los números que la componen.

Ejemplo 1. Hallar $\log x$, siendo $x = \frac{ab^3}{c \sqrt[3]{d^2}}$.

$$\log \frac{ab^3}{c \sqrt[3]{d^2}} = \log (ab^3) - \log (c \sqrt[3]{d^2}) =$$

$$= \log a + \log b^3 - (\log c + \log \sqrt[3]{d^2}) =$$

$$= \log a + 3 \log b - \left(\log c + \frac{2}{3} \log d\right) =$$

$$= \log a + 3 \log b - \log c - \frac{2}{3} \log d^{*)}.$$

Ejemplo 2.

$$\log \frac{\sqrt[5]{a (b-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \log \sqrt[5]{a (b-c)^2} - \log \sqrt{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{5} \log [a (b-c)^2] - \frac{1}{2} \log (a^2+b^2) =$$

$$= \frac{1}{5} [\log a + 2 \log (b-c)] - \frac{1}{2} \log (a^2+b^2)$$

---

*) Aquí la base del logaritmo es un número positivo arbitrario, distinto de la unidad; para brevedad no la escribimos.

Cabe hacer notar que la suma y la diferencia no se exponen a logaritmación.

Ejemplo 3. Dados: $\log_{10}2 \approx 0{,}3010$, $\log_{10}3 \approx 0{,}4771$, hallar $\log_{10}\sqrt[5]{12}$.

$$\log_{10}\sqrt[5]{12}=\frac{1}{5}\log_{10}12=\frac{1}{5}\log_{10}(2^2\cdot 3)=$$
$$=\frac{1}{5}(2\log_{10}2+\log_{10}3)\approx\frac{1}{5}(2\cdot 0{,}3010+0{,}4771)\approx 0{,}216.$$

Ejemplo 4.

$$y=\frac{(a-b)^3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2 d^3}},$$

$$\log y=3\log(a-b)+\frac{1}{3}\log c-\frac{1}{5}[2\log(a+b)+3\log d].$$

§ 167. Potenciación

Si por el logaritmo de cierta expresión se busca la propia expresión, se dice que hay que realizar la potenciación, es decir, la operación inversa a la logaritmación.

Ejemplo 1. Dado: $\log x=\log a+2\log b-\log c$, hallar x.

$$x=\frac{a\cdot b^2}{c}.$$

Ejemplo 2.

$$\log x=\frac{1}{3}\left[\log a-\frac{1}{2}\log b+2\log(a+b)\right]+\log c;$$

$$x=c\sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}.$$

En la potenciación nos valemos de las siguientes consideraciones: la suma de logaritmos es igual al logaritmo del producto, por ejemplo

$$\log m+\log n=\log(m\cdot n);$$

la diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente; el factor antepuesto al logaritmo indica que se ha tomado un logaritmo de potencia, por ejemplo:

$$3\log a=\log a^3,$$
$$\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt[3]{ab}.$$

La correción de la potenciación siempre se puede verificar por la logaritmación.

§ 168. Sistema de logaritmos decimales

Los logaritmos de los números, calculados por una misma base, forman un *sistema de logaritmos*. En particular, si como base se toma el número 10, el sistema de logaritmos se llama *decimal*. Los logaritmos decimales se indican por el símbolo «lg» sin apuntar la base 10, es decir, en lugar de $\log_{10} A$ se escribe simplemente $\lg A$.
Los logaritmos decimales tienen una serie de propiedades, que los hacen extraordinariamente cómodos en los cálculos. Mencionemos estas propiedades.

Propiedad I. *El logaritmo decimal de un número entero, representado por la unidad con ceros consecutivos, es igual a tantas unidades como ceros tiene el número.* Esta propiedad es evidente, puesto que

$10^1 = 10$, es decir, $\lg 10 = 1$;
$10^2 = 100$, es decir, $\lg 100 = 2$;
$10^3 = 1000$, es decir, $\lg 1000 = 3$;
. . . .
$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ ceros}}$, es decir, $\lg \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ ceros}} = n$.

Propiedad II. *El logaritmo de una fracción decimal propia, representada por la unidad precedida de ceros, es igual a tantas unidades negativas como ceros preceden a la unidad, considerando también cero de enteros.* En efecto,

$10^{-1} = 0{,}1$, de donde $\lg 0{,}1 = -1$;
$10^{-2} = 0{,}01$, de donde $\lg 0{,}01 = -2$;
$10^{-3} = 0{,}001$, de donde $\lg 0{,}001 = -3$;
. . . .
$10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ ceros}}$, de donde $\lg \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ ceros}} = -n$.

Los logaritmos decimales de números racionales, que no son números de tipo 10^n y 10^{-n} (n es un número entero), no se pueden expresar exactamente ni por un número entero, ni por un fraccionario; éstos son números irracionales.

Vamos a demostrar, por ejemplo, que lg 2 no puede ser igual al número fraccionario $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros positivos.
Si suponemos que $\lg 2 = \frac{p}{q}$, tendremos que tener la igualdad $10^{\frac{p}{q}} = 2$, ó $10^p = 2^q$. Esta igualdad no es posible, puesto que su primer miembro 10^p es un número representado por la unidad con p ceros, y está compuesto de los factores 2 y 5, repetidos p veces $[10^p = (2 \cdot 5)^p = 2^p \cdot 5^p]$; el segundo miembro 2^q no puede dar tal descomposición, por lo tanto, la suposición de que lg 2 es un número fraccionario no es cierta.
Sin embargo, se puede calcular aproximadamente lg 2, así como el logaritmo de cualquier otro número con cualquier grado de precisión, es decir, con cualquier número de cifras decimales. En el siguiente párrafo se dará un ejemplo de este cálculo. Aquí damos el modo de estimar aproximadamente el logaritmo, es decir, el modo de hallar entre qué números enteros está comprendido.
Supongamos que se quiera hallar lg 275,6; escribimos la desigualdad

$$100 < 275{,}6 < 1000;$$

luego

$$\lg 100 < \lg 275{,}6 < \lg 1000,$$

ó $2 < \lg 275{,}6 < 3$, de donde

$$\lg 275{,}6 = 2 + \text{una fracción propia positiva.}$$

DEFINICIÓN. La parte entera de un logaritmo se llama *característica*, la parte fraccionaria, *mantisa*. En las tablas de cuatro decimales de Bradis hallamos: $\lg 275{,}6 = 2{,}4402$; aquí la característica es 2 y la mantisa 0,4402.

Propiedad III. *La característica del logaritmo de un número, mayor o igual a 1, tiene tantas unidades como cifras en parte entera del número menos una.*
Al principio vamos a comprobar la veracidad del postulado enunciado en los distintos ejemplos, y luego veremos el caso general.
a) El número 32,185 tiene en la parte entera dos cifras comprendidas entre 10^1 y 10^2, es decir, $10^1 < 32{,}185 <$

$< 10^2$, pero al número mayor le corresponde un logaritmo mayor:

$\lg 10 < \lg 32{,}185 < \lg 10^2$,

ó $1 < \lg 32{,}185 < 2$,. de donde

$\lg 32{,}185 = 1 +$ una fracción propia.

La característica es igual a 1, es decir, una unidad menos que el número de cifras de la parte entera.

b) $\lg 5147{,}3 = 3 +$ una fracción propia, puesto que

$1000 < 5147{,}3 < 10\,000$,

ó $10^3 < 5147{,}3 < 10^4$, de donde

$3 < \lg 5147{,}3 < 4$.

c) Supongamos que el número A tiene en la parte entera n cifras, en tal caso tendremos la desigualdad

$10^{n-1} \leqslant A < 10^n$,

de donde $n - 1 \leqslant \lg A < n$, por lo tanto,

$$\lg A = \underbrace{n - 1}_{\text{característica}} + \underbrace{\text{una fracción propia}}_{\text{mantisa}}$$

Propiedad IV. *La característica de un logaritmo de fracción decimal propia contiene tantas unidades negativas como ceros preceden a la primera cifra significativa, considerando incluso el cero de los enteros; en este caso la mantisa es positiva.*

Ejemplo 1. La fracción 0,0475 está comprendida entre 0,01 y 0,1, es decir,

$0{,}01 < 0{,}0475 < 0{,}1$;

$\lg 0{,}01 < \lg 0{,}0475 < \lg 0{,}1$;

$-2 < \lg 0{,}0475 < \lg -1$.

Por lo tanto, $\lg 0{,}0475 = -2 +$ una fracción propia positiva. En este caso la característica es igual a -2. A la primera cifra significativa (4) le preceden dos ceros.

Ejemplo 2. $\lg 0{,}00054 = -4 +$ una fracción entera positiva, puesto que

$0{,}0001 < 0{,}00054 < 0{,}001$,

de donde

$\lg 0{,}0001 < \lg 0{,}00054 < \lg 0{,}001$;

$-4 < \lg 0{,}00054 < -3$.

Supongamos tener una fracción decimal propia α, a cuya primera cifra significativa preceden n ceros (considerando el cero de los enteros). En forma general, dicha fracción se puede representar así:

$$\alpha = \overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{n \text{ ceros}} b_1 b_2 \ldots,$$

donde b_1 es la primera cifra significativa.
Tenemos la desigualdad

$$\overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{n \text{ ceros}}1 \leqslant \alpha < \overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{(n-1) \text{ ceros}}1$$

Por eso

$$\lg \overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{n \text{ ceros}}1 \leqslant \lg \alpha < \lg \overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{(n-1) \text{ ceros}}1;$$
$$-n \leqslant \lg \alpha < -(n-1).$$

El logaritmo de la fracción dada resultó comprendido entre dos números enteros negativos: $-n$ y $-(n-1)$, cuya diferencia es igual a 1, por lo tanto, éste es igual a un número menor + una fracción propia positiva:

$\lg \alpha = -n +$ una fracción propia positiva.

Así pues, la característica de $\lg \alpha$ es igual a $-n$.
Convenimos en escribir la suma algebraica de un número entero negativo y una fracción propia positiva, en forma abreviada, así:

$$-3 + 0{,}4317 = \bar{3}{,}4317;$$
$$-5 + 0{,}8205 = \bar{5}{,}8205$$

El signo menos de encima indica que sólo la parte entera es negativa, siendo la mantisa positiva (se lee: cinco bajo el signo menos). En esta forma se admite escribir los logaritmos de los números menores que 1; esta forma de logaritmo se llama *artificiosa.*
Todo logaritmo negativo se puede reducir a la forma artificiosa, por ejemplo:

a) $-2{,}1543 = -2 - 0{,}1543 = (-2 - 1) + (1 - 0{,}1543) = -3 + 0{,}8457 = \bar{3}{,}8457;$
b) $-1{,}0647 = (-1 - 1) + (1 - 0{,}0647) = -2 + 0{,}9353 = \bar{2}{,}9353;$
c) $-4{,}2564 = \bar{5}{,}7436.$

R e g l a. Para convertir un logaritmo negativo en la forma artificiosa se procede del siguiente modo: se aumenta en una unidad negativa la característica y sobre el resultado se pone el signo menos, todas las cifras de la mantisa se restan de 9, y la última, de 10.

Propiedad V. *Al multiplicar o dividir un número por 10, 100, 1000, etc. la mantisa de su logaritmo permanece invariable, y la característica se aumenta o se disminuye respectivamente en una, dos, tres, etc. unidades.*

Hay que señalar que los números 10, 100, 1000, . . . son potencias enteras positivas de 10, es decir, números de tipo 10^n.

a) Tenemos: $\lg (A \cdot 10^n) = \lg A + \lg 10^n = \lg A + n$.

Debido al producto del número A por 10^n el logaritmo aumentó n unidades, por lo tanto, la parte fraccionaria, la mantisa, quedó invariable.

b) $\lg \left(\frac{A}{10^n}\right) = \lg A - \lg 10^n = \lg A - n$;

el logaritmo disminuyó n unidades, por lo tanto, la mantisa permanece igual. Por ejemplo:

$$\lg 38{,}1 = 1{,}5809;$$
$$\lg 381 = 2{,}5809;$$
$$\lg 3810 = 3{,}5809;$$
$$\lg 38\,100 = 4{,}5809;$$
$$\lg 3{,}81 = 0{,}5809;$$
$$\lg 0{,}381 = \bar{1}{,}5809;$$
$$\lg 0{,}000381 = \bar{4}{,}5809.$$

Corolario. 1) *La característica de un logaritmo depende solamente de la situación de la coma en el número dado, pero no depende de las cifras que representan este número.*

Los logaritmos de números tales como 278; 598,5; 110,7; 705,48; 142,845 tienen una misma característica, igual a 2.

2) *La mantisa no depende de la situación de la coma, sino solamente de las cifras significativas y su disposición mutua.*

Las mantisas de los logaritmos de números tales como 23,4; 2,34; 0,234; 2340, etc., son iguales.

§ 169. Cálculo de logaritmo

En el § 168 se demostró que lg 2 es un número irracional. Veamos el método que permite calcular el valor aproximado

de lg 2 con el grado de precisión dado, por ejemplo, con la exactitud de hasta 0,001.

El método se reduce a lo siguiente: se hallan dos potencias enteras positivas de 10, cuyos exponentes se diferencian en 1; entre ellas debe estar comprendida la potencia del número 2 con un exponente suficientemente grande En otras palabras, hay que resolver la desigualdad de tipo

$$10^m < 2^p < 10^{m+1}, \tag{1}$$

donde m y p son los números enteros positivos buscados.

Si $p \geqslant 1000$, se logrará la exactitud requerida. En realidad, por logaritmación de la desigualdad (1) obtendremos:

$$m < p \lg 2 < m + 1, \text{ ó } \frac{m}{p} < \lg 2 < \frac{m+1}{p}.$$

Las dos fracciones $\frac{m}{p}$ y $\frac{m+1}{p}$, entre las que está comprendido lg 2, se diferencian entre sí en la magnitud $\frac{1}{p}$. Cuando $p \geqslant 1000$ se alcanzará la precisión requerida.

Pasemos al cálculo, para lo cual utilizamos la tabla de cuadrados como medio auxiliar. Tendremos

$$\begin{aligned}
2^5 &= 32; \\
2^{10} &= 32^2 = 1024 = 1{,}024 \cdot 10^3; \\
2^{20} &= (1{,}024 \cdot 10^3)^2 \approx 1{,}04 \cdot 10^6; \\
2^{40} &\approx (1{,}04 \cdot 10^6)^2 \approx 1{,}08 \cdot 10^{12}; \\
2^{80} &\approx (1{,}08 \cdot 10^{12})^2 \approx 1{,}16 \cdot 10^{24}; \\
2^{160} &\approx (1{,}16 \cdot 10^{24})^2 \approx 1{,}34 \cdot 10^{48}; \\
2^{320} &\approx (1{,}34 \cdot 10^{48})^2 \approx 1{,}79 \cdot 10^{96}; \\
2^{640} &\approx (1{,}79 \cdot 10^{96})^2 \approx 3{,}20 \cdot 10^{192}; \\
2^{1280} &\approx (3{,}20 \cdot 10^{192})^2 \approx 1{,}02 \cdot 10^{385}.
\end{aligned}$$

Puesto que $1{,}02 \cdot 10^{385} > 10^{385}$, pero $1{,}02 \cdot 10^{385} < 10^{386}$, entonces tendremos la desigualdad

$$10^{385} < 2^{1280} < 10^{386}.$$

Procediendo a la logaritmación de la doble desigualdad, obtendremos:

$$385 < 1280 \lg 2 < 386;$$

$$\frac{385}{1\,280} < \lg 2 < \frac{386}{1\,280};$$

$$0{,}3001 < \lg 2 < 0{,}3017,$$

o bien

$$0{,}300 < \lg 2 < 0{,}302.$$

Tomando la semisuma de los límites superior e inferior, tendremos:

$$\lg 2 \approx 0{,}301.$$

Un cálculo más exacto nos dará:

$$\lg 2 = 0{,}3010299956\ \ldots$$

Las primeras tres cifras decimales las calculamos con completa exactitud. Existen otros métodos de cálculo de logaritmos más convenientes, sólo que ellos requieren conocimientos de matemática superior.

§ 170. Operaciones con logaritmos

Antes de pasar a calcular utilizando logaritmos hay que estudiar las cuatro operaciones aritméticas con logaritmos, puesto que la técnica de la logaritmación se reduce fundamentalmente a esto. Veamos cada operación por separado.

1. Suma.

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2{,}1742 \\ \bar{1}{,}5736 \end{array} \\ \hline 1{,}7478 \end{array}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \bar{3}{,}4832 \\ \bar{1}{,}6758 \end{array} \\ \hline \bar{3}{,}1590 \end{array}$$

La suma se realiza por las reglas de la suma de fracciones decimales con la diferencia de que las características se suman algebraicamente, y al resultado se suman unidades enteras obtenidas de la suma de las fracciones decimales de las mantisas.

2. Resta. Examinemos algunos casos.

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 2{,}4845 \\ 3{,}1796 \end{array} \\ \hline \bar{1}{,}3049 \end{array}$$

De la mantisa del minuendo (0,4845) restamos la mantisa del sustraendo (0,1796), obrendremos como resultado 0,3049, a continuación de la característica del minuendo (2) restamos la característica del sustraendo (3), obtendremos —1; ambos resultados de la sustracción las unimos en la inscripción $\bar{1},3049$.

E j e m p l o 2.

$$\begin{array}{r} 1,3516 \\ -\ \bar{2},6432 \\ \hline 2,7084 \end{array}$$

Al restar las mantisas hemos tenido que tomar una unidad de la característica del minuendo, es decir, de 1,3561 se restó 0,6432, obteniéndose 0,7084; restando las características obtendremos $0 - (-2) = 2$.

E j e m p l o 3.

$$\begin{array}{r} \bar{3},2534 \\ -\ \bar{5},6718 \\ \hline 1,5816 \end{array}$$

A la característica del minuendo (—3) la representamos mentalmente como una suma $(-4 + 1)$. la unidad positiva la unimos a la mantisa y de 1,2534 restamos la mantisa del sustraendo 0,6718, obtendremos 0,5816. A continuación restamos las características: $-4 - (-5) = 1$; siendo el resultado final 1,5816.

3. Multiplicación. Al multiplicar un logaritmo de característica negativa por un número natural se multiplica por separado la mantisa y la característica:

$$\bar{2},1853 \cdot 4 = (-2 + 0,1853) \cdot 4 = -8 + 0,7412 = \bar{8},7412.$$

Generalmente tal producto se realiza sin representar el logaritmo en forma de una suma algebraica, por ejemplo:

$$\bar{1},8916 \cdot 5 = \bar{1},4580.$$

Después de multiplicar las fracciones decimales de la mantisa por 5 se obtuvo 4 unidades enteras positivas, las que fácilmente se suman mentalmente a 5 unidades negativas obtenidas del producto de —1 por 5: $-5 + 4 = -1$; el resultado final será $\bar{1},4580$.

Si un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva se multiplica por una fracción decimal positiva, conviene transformar el logaritmo de la forma artificiosa en la natural, multiplicar las dos fracciones decimales y convertir el resultado en la forma artificiosa.

Ejemplo 1.

$\bar{1},1526 \cdot 0,23 = (-1 + 0,1526) \cdot 0,23 = -0,8474 \cdot 0,23 =$
$= -0,1949 = \bar{1},8051.$

Ejemplo 2.
$\bar{3},6418 \cdot (-0,47) = -2,3582 \cdot (-0,47) = 1,1084.$

4. **División.** Al dividir un logaritmo de característica negativa por un número natural, hay que distinguir dos casos: a) cuando la característica se divide enteramente, b) cuando la característica no se divide enteramente.

Ejemplo 1. $\bar{2},1856 : 2 = \bar{1},0928.$
Aquí se dividió a la vez por 2 la característica y la mantisa.

Ejemplo 2.

$\bar{2},4365 : 5 = (-2 + 0,4365) : 5 = (-5 + 3,4365) : 5 =$
$= -1 + 0,6873 = \bar{1},6873.$

Agregamos a la característica tantas unidades negativas (—3) a fin de obtener el número entero próximo que se divida enteramente por el divisor; al mismo tiempo agregamos a la mantisa la misma cantidad de unidades positivas y dividimos por separado los enteros obtenidos y la parte fraccionaria.

Ejemplo 3. $\bar{5},4724 : 4 = \bar{2},8681.$

A la característica se le agregó — 3 y a la mantisa +3; con facilidad se divide mentalmente.

Ejemplo 4.

$\bar{3},1832 : 0,658 = -2,8168 : 0,658 = -4,2809 = \bar{5},7191.$

Ejemplo 5.
$\bar{1},6405 : (-1,3) = -0,3595 : (-1,3) = 0,3595 : 1,3 =$
$= 0,2765.$

§ 171. Logaritmo complementario

Como se sabe, los dos números N y $\frac{1}{N}$ se llaman *mutuamente inversos*, su producto es igual a 1.

● DEFINICIÓN. Se llama *logaritmo complementario del número* N el logaritmo del número $\frac{1}{N}$:

$\lg N$ ad. $= \lg \frac{1}{N}$.

Puesto que

$\lg \frac{1}{N} = -\lg N$,

luego

$\lg N$ ad. $= -\lg N$.

El logaritmo complementario del número N es el logaritmo del mismo número tomado con signo contrario; por ejemplo:

a) $\lg 17{,}18$ ad. $= -\lg 17{,}18 = -1{,}2350 = \bar{2}{,}7650$;

b) $\lg 0{,}0085$ ad. $= -\lg 0{,}0085 = -\bar{3}{,}9294 =$
$= -(-3 + 1 - 1 + 0{,}9294) = -(-2-0{,}0706) =$
$= 2{,}0706$.

Supongamos que $\lg N = c + m$, donde c es la característica y m la mantisa, en tal caso,

$\lg N$ ad. $= -\lg N = -c - m = -c - 1 - m + 1 =$
$= -(c + 1) + (1 - m)$.

Para hallar el logaritmo complementario según el logaritmo de N hay que agregar a la característica la unidad y tomar el resultado con signo contrario; la mantisa se resta de 1.

E j e m p l o s.

1) $-\lg 0{,}0672 = \lg 0{,}0672$ ad. $= -\bar{2}{,}8274 = 1{,}1726$;

2) $-\lg 13{,}8 = -1{,}1399 = \bar{2}{,}8601$;

3) $-\frac{2}{3}\lg 0{,}825 = -\frac{2}{3}\cdot\bar{1}{,}9165 = -\frac{\bar{1}{,}8330}{3} =$
$= -\bar{1}{,}9443 = 0{,}0557$.

§ 172. Tablas de logaritmos

Las tablas de Bradis dan los valores aproximados de las mantisas de los logaritmos de todos los números enteros de 1 a 9999 con cuatro cifras decimales exactas; la característica del logaritmo se pone a base de las propiedades señaladas de los logaritmos decimales. Puesto que la mantisa del

logaritmo no depende del lugar de la coma en la representación del número, sino depende sólo de la sucesión de cifras significativas del número dado, estas tablas se pueden utilizar para buscar las mantisas de los números fraccionarios. A continuación se da una parte de la tabla.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Supongamos que se quiere hallar lg 65,4. Las dos primeras cifras del número (65) las tomamos de la primera columna de la izquierda, marcada encima con la letra «*N*», y corremos la vista desde el número 65 horizontalmente hasta la columna vertical donde se encuentra la tercera cifra significativa escrita encima (o debajo), es decir, la cifra 4. En la intersección de la vertical y la horizontal obtendremos la mantisa 8156, que designa las decimales, es decir, 0,8156, por lo tanto, lg 65,4 = 1,8156. Las mantisas de los logaritmos de los números de dos cifras y de tres cifras, que terminan con ceros, se obtienen de la columna indicada encima por el cero; por ejemplo, la mantisa del logaritmo de 68 ó de 680 es igual a 0,8325.

Para hallar el logaritmo de un número de cuatro cifras, por ejemplo, el lg 6754, determinamos antes que nada la característica, es decir, escribimos lg 6754 = 3, . . .; las cifras desconocidas de la mantisa las hallamos del siguiente modo: como se explicó antes, primero encontramos la mantisa del logaritmo del número de tres cifras 675, es decir, el representado por las tres primeras cifras del número dado; obtenemos 0,8293; desde esta mantisa corremos la vista hacia la derecha por la línea horizontal, intersecando la raya vertical doble y continuando hasta encontrar la columna de la parte derecha de la tabla indicada encima con la cifra 4; en la intersección hallamos el número 3 (3 diezmilésimas); ésta es una corrección a la cuarta cifra significativa 4, que

se suma con facilidad mentalmente a la mantisa ya hallada 0,8293; finalmente obtenemos: lg 6754 = 3,8296.

§ 173. Tablas de antilogaritmos

El número correspondiente al logaritmo dado se llama *antilogaritmo*. Para hallar el número según su logaritmo dado se utilizan las tablas de antilogaritmos. El modo de su empleo no se diferencia en nada de las tablas de logaritmos descriptas antes. Si $\lg x = \bar{1},5245$, hallaremos x (antilogaritmo) del siguiente modo: dejando de lado por ahora la característica, tomamos las dos primeras cifras de la mantisa, es decir, 52, de la primera columna de izquierda, indicada con la letra m (mantisa), y corremos la vista por esta horizontal hasta encontrarnos con la columna señalada encima con la tercera cifra de la mantisa 4; en su intersección hallamos el número 3342; para la cuarta cifra de la mantisa, 5, hallamos la corrección 4, que se encuentra en la intersección de la misma horizontal con aquélla de las columnas extremas de derecha, que está encabezada por la cifra 5; sumamos esta corrección (error) al número encontrado 3342 y obtendremos $x = 0,3346$. A la primera cifra significativa le antecede un cero, puesto que la característica es igual a $\bar{1}$.

§ 174. Ejemplos de cálculos con uso de logaritmos

Ejemplo 1. $x = \sqrt[3]{\dfrac{783\sqrt{41,3}}{0,815^2 \cdot 52,6}}$.

$\lg x = \frac{1}{3}\left[\lg 783 + \frac{1}{2}\lg 41,3 - (2\lg 0,815 + \lg 52,6)\right]$,

o bien

$\lg x = \frac{1}{3}\left(\lg 783 + \frac{1}{2}\lg 41,3 + 2\lg 0,815 \text{ ad.} + \lg 52,6 \text{ ad.}\right)$.

Cálculos preliminares

$\frac{1}{2}\lg 41,3 = \frac{1,6160}{2} = 0,8080$;

$\lg 0,815 \text{ ad.} = -(\bar{1},9112) = 0,0888$;

$\lg 52,6 \text{ ad.} = -1,7210 = \bar{2},2790$;

Cálculos finales

$\lg 783 = 2,8938$

$\frac{1}{2}\lg 41,3 = 0,8080$

$2\lg 0,815 \text{ ad.} = 0,1776$

$\lg 52,6 \text{ ad.} = \bar{2},2790$

$2,1584$

$\lg x = \frac{2,1584}{3} = 0,7195$;

$x = 5,242$;

$x \approx 5,24$.

Ejemplo 2.

$$y=\sqrt[5]{0,178\cdot\sqrt[3]{0,4963}+4,727\sqrt{0,00283}}.$$

Calculamos cada sumando subradical por separado:

1) $N=0,178\sqrt[3]{0,4963}$;

$$\lg N=\lg 0,178+\frac{1}{3}\lg 0,4963;$$

$$\lg 0,178=\bar{1},2504$$

$$\frac{1}{3}\lg 0,4963=\frac{\bar{1},6958}{3}=\bar{1},8986$$

$$\lg N=\bar{1},1490$$

$$N=0,1409;$$

2) $M=4,727\cdot\sqrt{0,00283}$;

$$\lg M=\lg 4,727+\frac{1}{2}\lg 0,00283;$$

$$\frac{1}{2}\lg 0,00283=\frac{\bar{3},4518}{2}=\bar{2},7259$$

$$\lg 4,727=0,6745$$

$$\lg M=\bar{1},4004$$

$$M=0,2514;$$

3)
$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}0,1409\\0,2514\end{array}\\ \hline 0,3923;\end{array}$$

4) $y=\sqrt[5]{0,3923}$;

$$\lg y=\frac{\lg 0,3923}{5}=\frac{\bar{1},5936}{5}=\bar{1},9187;$$

$y=0,8292$; $y\approx 0,829$.

Ejemplo 3.

$$Z=\frac{(6,429)^{-0,32}\cdot(0,819)^{\frac{1}{3}}}{(4,27)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0,00318)^{0,48}}$$

Representamos dicha expresión en la siguiente forma:

$$Z=\frac{(4,27)^{\frac{3}{5}}\cdot(0,819)^{\frac{1}{3}}}{(6,429)^{0,32}\cdot(0,00318)^{0,48}}.$$

Pasamos a la logaritmación:

$$\lg Z = \frac{3}{5}\lg 4{,}27 + \frac{1}{3}\lg 0{,}819 + 0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} + $$
$$+ 0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.}$$

Cálculos auxiliares

1) $0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} =$
$= -0{,}32\cdot 0{,}8081 =$
$= -0{,}2586 = \bar{1},7414;$

2) $0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.} =$
$= -0{,}48\cdot(\bar{3},5024) =$
$= -0{,}48\cdot(-2{,}4976) =$
$= 1{,}1988;$

3) $\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = \frac{3\cdot 0{,}6304}{5} =$
$= \frac{1{,}8912}{5} = 0{,}3782;$

Cálculos finales

$$\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = 0{,}3782$$
$$\frac{1}{3}\lg 0{,}819 = \frac{\bar{1},9133}{3} = \bar{1},9711$$
$$0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} = \bar{1},7414$$
$$0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.} = 1{,}1988$$
$$\lg Z = 1{,}2895$$
$$Z = 19{,}47;$$
$$Z \approx 19{,}5.$$

§ 175. Módulo de paso de un sistema de logaritmos a otro

Planteamos la siguiente cuestión: ¿cómo hallar el logaritmo de un número positivo N de base b ($b > 0$ y $b \neq 1$), si se conoce el logaritmo de N de base a ($a > 0$, $a \neq 1$)?

Para responder a la pregunta planteada hay que saber hallar un *factor* de paso con el cual se obtiene un nuevo sistema de logaritmos.

Supongamos que $\log_a N = m$ (m es un número conocido). Hay que hallar el $\log_b N = x$ (x desconocido).

Siendo así

$$a^m = N,\ b^x = N,$$

de donde

$$a^m = b^x.$$

Tomamos logaritmos de ambos miembros de esta igualdad de base a:

$$m\log_a a = x\log_a b,$$

o bien

$$m = x\log_a b,$$
$$x = m\cdot\frac{1}{\log_a b}.$$

21

Sustituyendo x y m por sus valores, obtendremos

$$\log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

El factor $\frac{1}{\log_a b}$ se llama *módulo de paso* de un sistema de logaritmos de base a a otro sistema de base b.

Ejemplos.

1) $\log_5 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg 5} = 0{,}3010 \cdot \frac{1}{0{,}6990} \approx 0{,}431.$

2) $\log_2 7 = \lg 7 \cdot \frac{1}{\lg 2} = 0{,}8451 \cdot 3{,}322 \approx 2{,}807.$

3) $\log_{\sqrt{a}} N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{a}} = 2 \log_a N.$

Supongamos que a y b son dos números positivos distintos de 1, en tal caso se obtendrá la identidad

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1,$$

puesto que de la igualdad $a^{\log_a b} = b$ mediante su logáritmación de base b hallamos:

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_b b = 1.$$

Observación. Además de los logaritmos decimales, en matemáticas y sus distintas aplicaciones se utilizan ampliamente los logaritmos naturales (también llamados neperianos) la base de los cuales es el número irracional e, $e \approx 2{,}718$. Los logaritmos naturales se indican con «ln» sin indicar la base, por ejemplo

$$\ln 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg e} \approx 0{,}3010 \frac{1}{\lg 2{,}718} = 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}6932.$$

Así, pues, el logaritmo natural de un número es aproximadamente 2,3 veces mayor que el logaritmo decimal del mismo número.

Veamos casos particulares del módulo de paso:

1) si la nueva base $b = \frac{1}{a}$, tendremos que $M = \frac{1}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{1}{-1} = -1$, por lo tanto, $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$;

2) si $b = a^2$, $M = \frac{1}{\log_a a^2} = \frac{1}{2}$, $\log_{a^2} N = \frac{1}{2} \log_a N$;

3) si $b=\sqrt{a}$, $M=\frac{1}{\log_a \sqrt{a}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, $\log_{\sqrt{a}} N=2\log_a N$;

4) si $b=a^n$, $M=\frac{1}{\log_a a^n}=\frac{1}{n}$.

De este modo,

$$\log_{a^n} N=\frac{1}{n}\log_a N.$$

El caso 4) generaliza las tres anteriores: para $n=-1$ tendremos el caso 1), cuando $n=2$ tendremos el caso 2), si $n=\frac{1}{2}$ tendremos el caso 3).

E j e m p l o. Resolver la ecuación

$$\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+\log_4 x+\log_{\sqrt{2}} x=\frac{15}{2}.$$

Reducimos todos los logaritmos a la base 2:

$$\log_2 x-\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+2\log_2 x=\frac{15}{2},$$

$$\frac{5}{2}\log_2 x=\frac{15}{2},$$

$$\log_2 x=3,\ x=8.$$

§ 176. Ecuaciones exponenciales

Veamos las ecuaciones con la incógnita en el exponente. Generalmente estas ecuaciones se llaman *exponenciales*, por ejemplo:

$$\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}};\ 5^{x+1}+5^x=750;\ 9^{x+1}-3^{x+3}=486.$$

Existen dos métodos fundamentales de resolución de las ecuaciones exponenciales.

1. Metodo de reducción a una base común. Si ambos miembros de una ecuación se puede representar como potencias de base a, donde a es un número positivo, distinto de 1, de la igualdad de las potencias y las bases se deduce que los exponentes deben ser iguales. Igualando los exponentes obtendremos un tipo de ecuación generalmente conocido.

E j e m p l o 1. $\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}}$.

Tendremos:

$$3^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}};\quad 3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{3}{2}},$$

de donde

$$\frac{x}{2}=-\frac{3}{2};\quad x=-3.$$

Comprobación.

$$\sqrt{3^{-3}}=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

Ejemplo 2. $5^{x+1}+5^{x}=750$.
Puesto que $5^{x+1}=5^{x}\cdot 5$ en el primer miembro se puede sacar fuera de paréntesis el factor común 5^{x}, por lo que obtendremos:

$$5^{x}\cdot(5+1)=750;\quad 5^{x}\cdot 6=750,\quad 5^{x}=125,$$

o bien

$$5^{x}=5^{3};\quad x=3.$$

Comprobación.

$$5^{3+1}+5^{3}=625+125=750;$$

$$750=750.$$

Ejemplo 3. $\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{3}.$

Representemos ambos miembros de la ecuación como potencias de 3:

$$9^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$(3^{2})^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}},$$

de donde

$$x(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

$$x^{2}-x-\frac{3}{4}=0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos

$$x_{1}=-\frac{1}{2};\quad x_{2}=\frac{3}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada comprobamos que ambas raíces satisfacen la misma.

2. Método de logaritmación de ambos miembros de una ecuación.

E j e m p l o 4. $2{,}3^x = 1{,}5^{x+1}$.
Aquí es más conveniente la logaritmación de ambos miembros de la ecuación, después de lo cual obtenemos

$$x \lg 2{,}3 = (x+1) \lg 1{,}5;$$

$$x \lg 2{,}3 - x \lg 1{,}5 = \lg 1{,}5;$$

$$x (\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5) = \lg 1{,}5;$$

$$x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5} \approx \frac{0{,}1761}{0{,}1856} \approx 0{,}95.$$

En ciertos casos, al resolver una ecuación exponencial es conveniente introducir una incógnita auxiliar.

E j e m p l o 5. $4^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0$.
Tendremos

$$(2^2)^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0,$$

o bien

$$2^{2x} \cdot 2^{-2} - 2^x \cdot 2^3 + 28 = 0;$$

supongamos que $2^x = z$; en tal caso $2^{2x} = z^2$; la ecuación toma la forma

$$\frac{z^2}{4} - 8z + 28 = 0, \text{ ó } z^2 - 32z + 112 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos
$z_1 = 4$; $z_2 = 28$,

de donde

$$2^x = 4; \qquad x_1 = 2;$$
$$2^x = 28; \; x \lg 2 = \lg 28;$$

$$x_2 = \frac{\lg 28}{\lg 2} \approx 4{,}81.$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación dada.

E j e m p l o 6. Resolver el sistema

$$2^x \cdot 3^y = 12,$$
$$2^y \cdot 3^x = 18.$$

Dividimos miembro a miembro la primera ecuación por la segunda:

$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{2}{3}$, ó $2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$, pero $3^{y-x} = \frac{1}{3^{x-y}}$,

y por eso $\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$, por lo tanto,

$x - y = 1$, ó $y = x - 1$.

Ahora la primera ecuación del sistema toma la forma

$2^x \cdot 3^{x-1} = 12$, ó $6^x = 36$,

de donde $x = 2$, $y = 1$.

§ 177. Ecuaciones logarítmicas

● DEFINICIÓN. La ecuación con la incógnita bajo el signo de logaritmo se llama *logarítmica*.

Ejemplos de tales ecuaciones son:

1) $\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$,

2) $\sqrt{\lg x} = \lg\sqrt{x}$,

3) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

El método fundamental de resolución de las ecuaciones logarítmicas es la potenciación, a base de la que se obtiene comúnmente una ecuación algebraica. Las raíces halladas se deben verificar, ya que pueden aparecer raíces impropias.

Ejemplo 1. $\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$.

Es evidente que

$\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = \lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}$

(el primer miembro de la ecuación),

$2 - \lg 25 = \lg 100 - \lg 25 = \lg 4$

(el segundo miembro de la ecuación). De este modo

$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \lg 4$.

Pero a logaritmos iguales, tomados de una misma base, corresponden números iguales. Por lo tanto, $\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4$.

Resolviendo esta ecuación irracional hallamos dos raíces: $x_1=6$; $x_2=14$. Verificación de la raíz $x_1=6$: $\lg 12 - \frac{1}{2}\lg 9 = \lg 4$; $\lg \frac{12}{3} = \lg 4$ (es cierta).

Verificación de la raíz $x_2=14$; $\lg 20 - \frac{1}{2}\lg 25 = \lg 4$, $\lg \frac{20}{5} = \lg 4$ (es cierta).

Ejemplo 2. $\sqrt{\lg x} = \lg\sqrt{x}$.
Antes de hallar las raíces de esta ecuación hallamos el campo de valores admisibles de x: ambos miembros de la ecuación tienen sentido para $\lg x \geqslant 0$, $x \geqslant 1$; teniendo en cuenta que $\lg\sqrt{x} = \frac{1}{2}\lg x$, tendremos $\sqrt{\lg x} = \frac{1}{2}\lg x$; elevamos ambos miembros al cuadrado:

$\lg x = \frac{1}{4}\lg^2 x$, ó $\lg x(\lg x - 4) = 0$.

Por lo tanto,
$\lg x = 0$, $x_1 = 1$.
$\lg x = 4$, $x_2 = 10^4$.

Compruébese que ambas raíces satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo 3. $\lg(x^{\lg x}) = 1$. Está claro que $x > 0$ y $x \neq 1$.
Puesto que $\lg(x^{\lg x}) = \lg x \cdot \lg x = \lg^2 x$, la ecuación toma la forma: $\lg^2 x = 1$; $\lg x = \pm 1$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 10$; ambas raíces son ciertas.

Ejemplo 4. $2\lg\lg x = \lg(7-2\lg x) - \lg 5$.
Si se pone $\lg x = t$, tendremos que $2\lg t = \lg(7-2t) - \lg 5$, ó $\lg t^2 = \lg\frac{7-2t}{5}$, de donde $t^2 = \frac{7-2t}{5}$, $t_1 = -7/5$ (no sirve, puesto que no existe $\lg t$), $t_2 = 1$; $x = 10$. Se comprueba fácilmente que $x = 10$ satisface la ecuación dada.

Ejemplo 5. Resolver el sistema $xy = a^2$, $\lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg^2 a^2$.
Es evidente que los valores buscados de las incógnitas deben ser números positivos: $x > 0$; $y > 0$.
Pasamos a la logaritmación de la primera ecuación: $\lg x + \lg y = 2\lg a$. Suponemos que $\lg x = u$; $\lg y = v$, en tal

caso tendremos el sistema

$$\begin{cases} u+v=2\lg a, \\ u^2+v^2=\frac{5}{2}(2\lg a)^2. \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} u+v=2m, \\ u^2+v^2=10\,m^2, \end{cases}$$

donde $m=\lg a$.

Resolviendo este sistema, hallamos:

$u_1=-m=-\lg a;\ u_2=3\lg a;$

$v_1=3m=3\lg a;\ v_2=-\lg a,$

de donde $\lg x_1=-\lg a;\ x_1=\frac{1}{a}$;

$\lg y_1=3\lg a;\ y_1=a^3.$

Análogamente hallamos: $x_2=a^3,\ y_2=\frac{1}{a}$.

Verificación de la solución $x_1=\frac{1}{a};\ y_1=a^3$;

$\frac{1}{a}\cdot a^3=a^2,$

$(-\lg a)^2+(3\lg a)^2=10\lg^2 a.$

§ 178. Resolución de desigualdades exponenciales y logarítmicas elementales

Las desigualdades que contienen la incógnita en el exponente o bajo el signo de logaritmo se llaman respectivamente *desigualdades exponenciales* o *logarítmicas*. En la mayoría de los casos estas desigualdades se reducen a algebraicas.

Ejemplo 1. Resolver la desigualdad $2^{3x-2}<2^{x+3}$. Para una base mayor que 1, a un valor menor de la función exponencial corresponde un valor menor del exponente, es decir,

$3x-2<x+3,\ 2x<5,\ x<\frac{5}{2}.$

Ejemplo 2. Resolver la desigualdad $2\cdot3^{2x}-5\cdot3^x+2>0$. Introducimos una incógnita auxiliar. Ponemos $z=3^x$ $(z>0)$. En tal caso $2z^2-5z+2>0$, es decir, tendremos una desigualdad cuadrática de z. Las raíces del trinomio del primer miembro son iguales a $\frac{1}{2}$ y 2; por la regla conocida el trinomio es positivo para todos los valores de z comprendidos en el intervalo $\left(\frac{1}{2},2\right)$. Por lo tanto, $z>2$ ó $z<\frac{1}{2}$. Puesto que $z>0$, tendremos que $0<z<\frac{1}{2}$ ó $z>2$.

Así, pues, $0<3^x<\frac{1}{2}$ ó $3^x>2$.

De este modo, después de la logaritmación (de base 10) tendremos

$x \lg 3 < \lg \frac{1}{2}$,

$x < \frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg 3}$;

$x < -\frac{0{,}3010}{0{,}4771}$,

$x < -0{,}63$.

Resolviendo la segunda desigualdad $3^x > 2$, hallamos:

$x > \frac{\lg 2}{\lg 3}$, ó $x > 0{,}63$.

Ejemplo 3. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$.

Señalemos que la desigualdad tiene sentido si $2x+5>0$, o cuando $x > -\frac{5}{2}$. Representemos el segundo miembro de la desigualdad, es decir, el número -2 en la forma de $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, ó $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$. Luego $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$, pero, puesto que cuando la base es positiva, menor que la unidad, a un logaritmo menor corresponde un número mayor, tendremos que

$2x+5>9$; $x>2$.

Ejemplo 4. $\log_3|3-4x|>2$.

En dicha desigualdad x puede tomar cualquier valor, excepto $x = \frac{3}{4}$. Luego, por potenciación, tendremos:

$|3-4x|>3^2=9$.

$|3-4x|>9$.

1) Supongamos que $3-4x>0$, ó $x<\frac{3}{4}$. En tal caso

$3-4x>9$, $x<-\frac{3}{2}$.

2) Si $3-4x<0$, entonces $|3-4x|=4x-3$, $4x-3>9$, $x>3$.
De esta forma, la desigualdad $\log_3|3-4x|>2$ se satisface con los valores $x>3$ ó $x<-\frac{3}{2}$.

Ejemplo 5. $\log_6(x-3\sqrt{x+1}+3)<1$.
Esta desigualdad tiene sentido, si se cumplen simultáneamente dos condiciones

$$\begin{cases} x-3\sqrt{x+1}+3>0, \\ x+1 \geqslant 0, \text{ ó } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Resolvemos la primera desigualdad del sistema:

$x + 3 > 3\sqrt{x+1}$ para $x \geqslant -1$.

Aquí ambos miembros son positivos y se pueden elevar al cuadrado

$(x+3)^2 > 9(x+1)$, ó $x^2 - 3x > 0$,

$x < 0$, $x > 3$.

De este modo, la expresión afectada del signo de logaritmo tiene sentido si $-1 \leqslant x < 0$ y $x > 3$ Ahora resolvemos la propia desigualdad. Con la potenciación, recordando que la base de los logaritmos es mayor que 1, obtendremos $x - 3\sqrt{x+1} + 3 < 6$, ó

$$x - 3 < 3\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

1) Para todo x del intervalo $-1 \leqslant x < 0$ la desigualdad (1) se cumple, puesto que el primer miembro es negativo, el segundo miembro no es negativo, y, en consecuencia, la desigualdad inicial también es cierta.

2) Cuando $x > 3$ ambos miembros de la desigualdad (1) son positivos, se puede elevar al cuadrado, ya que el sentido de la desigualdad no cambia. Tengamos $(x-3)^2 < 9(x+1)$ Después de abrir paréntesis y pasar todos los términos al primer miembro obtendremos $x^2 - 15x < 0$, de donde $0 < x < 15$. Puesto que $x > 3$, las soluciones serán valores de x comprendidos en el intervalo $3 < x < 15$. De este modo, todos los puntos de los intervalos $-1 \leqslant x < 0$, $3 < x < 15$ son soluciones de la desigualdad inicial.

Ejemplo 6. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.
Por definición de función logarítmica las bases x y $2x$ deben ser positivas, no iguales a 1. De suerte que $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. Reducimos todos los logaritmos a una misma base, igual a 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}; \quad \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1+\log_2 x}$$

(véase la identidad $\log_b a \cdot \log_a b = 1$).
La desigualdad inicial adquiere la forma

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1.$$

Ponemos $\log_2 x = t$,

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2+t) > 1;$$

después de simples transformaciones la desigualdad toma la forma

$$\frac{-t^2+2}{t(t+1)} > 0, \quad \text{ó} \quad \frac{t^2-2}{t(t+1)} < 0.$$

Resolviéndola, hallamos: $-\sqrt{2} < t < -1$, $0 < t < \sqrt{2}$.

Sustituyendo t por $\log_2 x$, tendremos

1) $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, de donde $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$;

2) $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, de donde $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

§ 179. Ejemplos de resolución gráfica de ecuaciones y desigualdades

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $4x = 2^x$.
Trazamos la recta $y = 4x$ y la curva $y = 2^x$ (fig. 114).
Las abscisas de los puntos de intersección de estas líneas son raíces de la ecuación dada. En la figura se aprecia que las abscisas de los puntos de intersección de estas gráficas son $x_1 = 4$ y $x_2 \approx \frac{1}{3}$. De este modo, dicha ecuación tiene dos raíces. De las siguientes consideraciones se puede comprobar que la ecuación dada no puede tener más de dos raíces: la gráfica de $y = 2^x$ es una curva cóncava, en tanto que la recta puede tener con esta curva dos puntos comunes, o un punto común, o bien ninguno.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $x \cdot 2^{3^x} = 1$.
Dado que para todos los valores reales de x la función 3^x es positiva, luego $2^{3^x} > 1$ (propiedad de la función exponencial cuando la base es mayor que la unidad y el exponente positivo). Escribimos la ecuación dada en la forma

$$x = \frac{1}{2^{3^x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}.$$

Puesto que 2^{3^x} es positivo, tendremos que $x > 0$. Procediendo a la logaritmación de ambos miembros de la ecuación $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}$ de base $\frac{1}{2}$, obtenemos la ecuación $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x$, equivalente a la dada.
Construimos las gráficas de las funciones $\log_{\frac{1}{2}} x$ y 3^x (fig. 115). La abscisa del punto de intersección de estas gráficas es la solución de la ecuación dada. De la figura se desprende que la raíz de la ecuación es $x \approx \frac{1}{3}$.

Ejemplo 3. Resolver gráficamente la siguiente desigualdad $\left|\frac{x+2}{x+1}\right| > 1$. Si $x = -1$, el primer miembro de la desigualdad es indeterminado. Si $x \neq -1$, tendremos que $|x + 1| > 0$, por eso dicha desigualdad se puede escribir del siguiente modo: $|x + 2| > |x + 1|$. Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = |x + 2|$ e $y_2 = |x + 1|$ (fig. 116). De la figura se deduce que todos los valores de x que se encuentran a la derecha del punto $x = -1{,}5$, las ordenadas de la gráfica de y_1 son mayores que las respectivas ordenadas de la gráfica y_2.

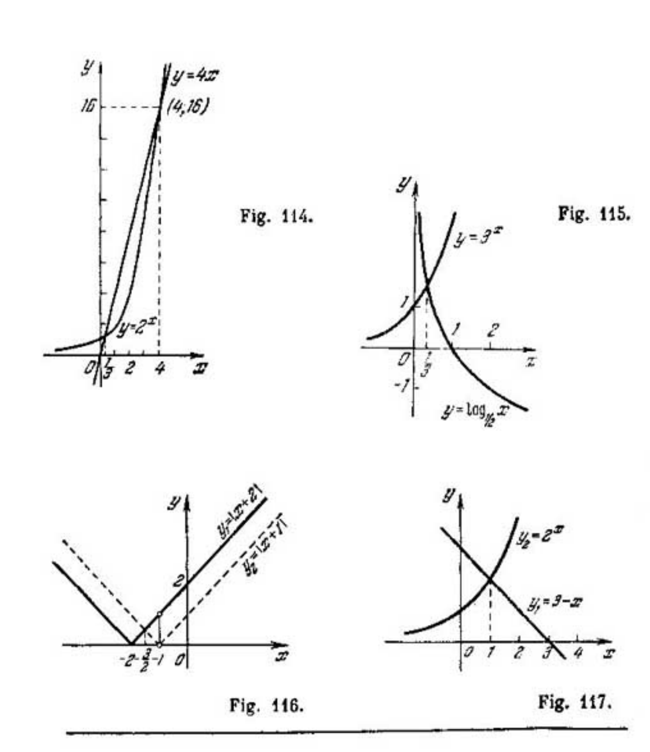


Fig. 116.

Fig. 117.

En consecuencia, $y_1 > y_2$, si $x > -1{,}5$. Pero, dado que $x \neq -1$, entonces $-1{,}5 < x < -1$ ó $x > -1$.

E j e m p l o 4. Resolver la desigualdad $3 - x > 2^x$. Construimos las gráficas:

1) de la recta $y_1 = 3 - x$,

2) de la función exponencial $y_2 = 2^x$ (fig. 117).

Las líneas se cortan en el punto $x = 1$. Para todo $x < 1$ la ordenada de la recta es mayor que la correspondiente ordenada de la gráfica de la función exponencial. Por lo tanto, todo número real de $x < 1$ es solución de la desigualdad.

▲ **Ejercicios**

1. Escribir las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica: 1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\,000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{-3} = 0{,}001$.

2. Escribir las siguientes igualdades logarítmicas en forma exponencial: 1) $\log_2 64 = 6$; 2) $\log_3 81 = 4$; 3) $\log_5 125 = 3$; 4) $\log_{10} 100\,000 = 5$; 5) $\log_{10} 0{,}01 = -2$; 6) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} = -3$;

7) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

3. Hallar los logaritmos de base 2 de los siguientes números: 1) 32; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt[3]{4}$; 8) $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

4. Hallar los logaritmos de base 10 de los siguientes números: 1) 10; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,0001; 5) 10^n; 6) $\sqrt{10}$; 7) $\sqrt[3]{10^2}$; 8) $\sqrt[5]{100}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

5. Basándose en la definición de logaritmo hallar la incógnita de las siguientes igualdades: 1) $x = \log_3 27$; 2) $y = \log_2 16$; 3) $z = \log_5 625$; 4) $x = \log_9 27$; 5) $y = \log_5 0{,}04$; 6) $u = \log_2 0{,}125$; 7) $\log_3 x = 2$; 8) $\log_5 x = 0$; 9) $\log_4 y = \frac{2}{3}$; 10) $\log_8 z = -2$; 11) $\log_{\frac{3}{2}} u = 2$;

12) $\log_{\frac{1}{2}} N = -3$

¿Para qué bases:

1) $\log 36 = 2$; 2) $\log 27 = \frac{3}{2}$; 3) $\log 64 = 4$; $\log 2 = -0{,}5$?

6. ¿Entre qué números enteros están comprendidos los logaritmos de base 2 de los números: 7, 30, 120 y 495?

7. ¿Entre qué números enteros se encuentran los logaritmos de base 10 de los números: 3, 18, 134 y 1782?

8. ¿Entre qué números enteros negativos están comprendidos los logaritmos de base 10 de los números: 1) 0,07; 2) 0,018; 3) 0,00215 y 4) 0,00005?

9. ¿Entre qué números enteros negativos están comprendidos los logaritmos de base 2 de los números: 1) $\frac{1}{15}$; 2) $\frac{3}{80}$ y 3) $\frac{1}{120}$?

10. ¿A qué es igual el logaritmo de $\sqrt[6]{8}$ cuando la base es: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 16; 5) 64?

11. ¿Con qué base $\sqrt{27}$ tiene logaritmo igual a: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}$?

12. Componer una sucesión de números tal, que los logaritmos de los términos de esta sucesión de base 2 formen la progresión aritmética 1, 2, 3, . . ., 10.
¿Qué sucesión forman estos números?

13. Demostrar en forma general que si los números forman una progresión geométrica con términos positivos, los logaritmos de estos términos forman una progresión aritmética.

14. Construir en un mismo dibujo las gráficas de las funciones: 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_2 (x+1)$; 3) $y = \log_2 x + 1$.

● Observación. Componer previamente la tabla de valores.

15. Expresar el logaritmo del número 15 por los logaritmos de los números 3 y 5.

16. Expresar el logaritmo de $2\frac{1}{3}$ por los logaritmos de los números 7 y 3.

17. Expresar: 1) log 8 por el log 2; 2) log 81 por el log 3.

18. Expresar: 1) $\log \sqrt{5}$ por el log 5; 2) $\log \sqrt[3]{2}$ por el log 2; 3) $\log \sqrt[5]{27}$ por el log 3.

19. ¿Cuáles son los logaritmos de los números simples que hay que saber para hallar los logaritmos de los números:

$$40,\ \frac{27}{64},\ \frac{12}{25},\ \sqrt{80},\ \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$$

de la misma base?

20. Hallar 1) $\log_2 (8\cdot 128)$; 2) $\log_5 (25\sqrt{125})$.

21. Sabiendo que $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, $\log_{10} 3 = 0{,}4771$; $\log_{10} 5 = 0{,}6990$, hallar: 1) $\log_{10} 40$; 2) $\log_{10} 1{,}8$; 3) $\log_{10} 0{,}12$; 4) $\log_{10} 0{,}02$.

22. Logaritmación de las siguientes expresiones:

1) $x = 3ab$; 2) $x = \frac{2ab}{c}$; 3) $y = a^3b^2$; 4) $z = \frac{a^2b^5}{c^3}$; 5) $x = 3(a-b)$;

6) $y = \frac{2a}{a^2-b^2}$; 7) $x = \sqrt{ab}$; 8) $x = \frac{\sqrt[3]{ac}}{(a+c)^2}$; 9) $y = \frac{1}{a^3bc^3}$;

10) $x = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}$; 11) $y = \frac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 12) $z = \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{5b\sqrt[3]{a^2b}}}$;

13) $y = \sqrt[n]{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{b}{a}}}$; 14) $x = \frac{5ab\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

15) $y = \left(\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$; 16) $x = \sqrt{\frac{40\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}}$;

17) $y = \frac{a^{-\frac{1}{2}}b^3}{c^{-\frac{3}{4}}}$; 18) $x = \sqrt[n]{m\sqrt[p]{b^2}}$; 19) $z = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}}$;

20) $y = \sqrt[m]{a^{n+1}\sqrt[n]{b^p}}$; 21) $x = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$;

22) $x = \log_a [(a+b)^{\log_a (a+b)}]$.

23. Hallar por el logaritmo de un número desconocido ese mismo número:

1) $\log x = \log 5 - \log 2 + \log 3$;
2) $\log x = \log 7 + \log 5 - \log 3$;
3) $\log y = 2\log 3 + 3\log 5$;
4) $\log z = 3\log 2 - 2\log 3 + \log 5$;

5) $\log y = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2$;

6) $\log u = \frac{1}{3}\log(a+b) - [\log a + 2\log(b+c)]$;

7) $\log x = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) - \frac{1}{3}[\log(a+b) - \log(b-a)]$;

8) $\log z = \dfrac{3\log a - (3\log b + 2\log c)}{4}$;

9) $\log y = \frac{1}{5}[3\log(a-b) + 2\log(a+b) - 4\log a]$;

10) $\log z = \frac{1}{3}\left[\log a + \frac{1}{4}(\log a + 3\log c)\right] -$
$- [\log b + 3\log(c+a) - \log(b+1)]$.

24. Hallar: 1) lg 1000; 2) lg 0,1; 3) lg 0,0001.

25. Hallar la característica de los logaritmos de los siguientes números:
7; 125; 5832; 109,54; 0,083. 0,00012.

26. Sabiendo que lg 32 = 1,5051, hallar: lg 3,2, lg 3200, log 0,32, lg 0,0032.

27. Representar los siguientes logaritmos de característica negativa en forma de números negativos:
1) $\bar{1},1728$; 2) $\bar{2},5893$, 3) $\bar{4},0075$; 4) $\bar{6},9917$.

28. Representar los siguientes logaritmos negativos en forma artificiosa, es decir, con mantisa positiva:
1) −0,5618; 2) −1,6247; 3) −2,0019; 4) −3,9904; 5) −0,7328.

29. Hallar por las tablas los logaritmos de los siguientes números enteros:
1) 30; 2) 160; 3) 4800; 4) 72 000; 5) 252; 6) 493; 7) 109; 8) 649; 9) 1183; 10) 7845, 11) 5848, 12) 2007.
Hallar los logaritmos de las siguientes fracciones:
1) 0,007; 2) 0,03; 3) 0,0008; 4) 0,0002; 5) 0,12; 6) 0,019; 7) 0,0031; 8) 0,0078; 9) 3,18; 10) 0,0542; 11) 72,8; 12) 0,632; 13) 30,65; 14) 1,967; 15) 18,12; 16) 0,4343.

30. Sabiendo que lg 375 = 2,5740, hallar sin tablas los logaritmos de los números: 1) 37,5; 2) 0,375; 3) 3,75; 4) 0,00375, 5) 3750.

31. Redondeando los números de cinco cifras dados hasta cuatro cifras, hallar sus logaritmos:
1) 13407; 2) 32,742; 3) 0,058369; 4) 18396; 5) 0,070418.

32. Hallar los números que corresponden a los logaritmos:
1) 0,8140; 2) 1,6590; 3) $\bar{1},6454$; 4) $\bar{2},7789$; 5) 3,1580; 6) $\bar{3},1752$; 7) 1,003; 8) 3,0463; 9) $\bar{2},0032$.

33. Hallar los logaritmos de los números y realizar las operaciones indicadas:
1) lg 0,057 + lg 0,09; 2) lg 3,18 + lg 0,25; 3) lg 25,6 − lg 18,2; 4) lg 0,873 − lg 0,543; 5) $\lg(2{,}17)^3$; 6) $\lg(0{,}3725)^3$; 7) $\lg\sqrt[4]{1{,}27}$; 8) 3 lg 0,728; 9) 2 lg 15,8 + 3 lg 0,263; 10) $\lg\sqrt{32{,}7} + \lg\sqrt[3]{0{,}0253}$.

34. Hallar los logaritmos complementarios:
1) lg 18,23 ad.; 2) lg 0,0532 ad.; 3) lg 318,6 ad.; 4) $\frac{2}{3}$ lg 0,326 ad.;

5) $-\frac{1}{2}$ lg 13,6.

35. Calcular mediante las tablas de logaritmos de cuatro cifras:

1) $x=0,7545\cdot 2,457$; 2) $x=144,6\cdot 0,0256\cdot 0,75^3$; 3) $x=\frac{120,4\cdot 1,44}{300,1}$;

4) $x=\frac{17,6\cdot 2,85}{43,6\cdot 8,95}$; 5) $y=\frac{0,0795\cdot 15,4}{1,18^2\cdot 32,7}$; 6) $z=\sqrt[5]{17,32}$; 7) $x=\sqrt[4]{0,0386}$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt[6]{0,724}}$; 9) $x=\frac{\sqrt[4]{27,32}}{0,4316}$; 10) $x=\sqrt[3]{\frac{23,6}{18,3}}$; 11) $y=\sqrt[4]{\frac{128}{9657}}$; 12) $z=\frac{37,26}{28,75}\sqrt{48,31}$; 13) $x=\sqrt[5]{0,42\sqrt{0,0275}}$;

14) $y=0,75^4\sqrt[3]{0,75^2}$;

15) $x=\sqrt[3]{0,275}\cdot\sqrt[4]{7,386}$; 16) $x=\frac{\sqrt[3]{2,5\sqrt[4]{0,0125}}}{\sqrt[4]{0,0125}\sqrt[3]{0,25}}$;

17) $y=\sqrt[5]{3,125-\sqrt[3]{0,75}}$; 18) $x=\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{0,0814}}$;

19) $x=\frac{1,56^3\cdot 0,00364^2\sqrt[3]{\frac{3}{7}}}{4,658^2\sqrt{0,0467}}$; 20) $y=2,75^{0,6}$; 21) $z=0,463^{0,45}$;

22) $x=\frac{1}{7,45^{0,32}}$; 23) $A=0,00485^{0,0682}$; 24) $y=1+0,4893^{0,285}$;

25) $x=\sqrt[3]{\frac{7,83\sqrt{41}}{\frac{1}{4}}}$; 26) $y=\frac{(0,089)^{0,41}\cdot(3\ 726)^{-1,3}}{300^{\frac{1}{7}}\cdot(43,6)^{-0,7}}$;

27) $x=\sqrt{\frac{7,82^{\frac{1}{2}}(3,47)^{-0,71}}{(6,402)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0,081)^{0,57}}}$.

36. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $\sqrt[x]{2}=2^x$; 2) $2^{x-1}=4^5$; 3) $4^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$; 4) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x}=\frac{64}{125}$;

5) $a^{x-7}=a^{7-x}$; 6) $9^{-3x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$; 7) $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^x}$.

37. Resolver las ecuaciones:

1) $13,2^x=8$; 2) $(0,785)^{2x}=3,18$; 3) $\sqrt[x]{22,1}=7^x$

38. Resolver las ecuaciones:

1) $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29$; 2) $x^{x^2-7x+12}=1$; 3) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;

4) $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$; 5) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

6) $\lg(x^3)-\frac{12}{\lg x}=5$; 7) $\lg\sqrt{7x+5}+\frac{1}{2}\lg(2x+7)=1+\lg 4,5$;

8) $x^{\lg x-1}=100$; 9) $x^{3-\frac{\lg x}{3}}=900$;

10) $\lg(x-5)-\frac{1}{2}\lg(3x-20)=0{,}3010$; 11) $x^{\lg x}=100\,x$;

12) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$; 13) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

14) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$; 15) $\lg(5x^2-14x+1)=\lg(4x^2-4x-20)$.

39. Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

$\lg x-\frac{x}{2}+4=0$; $2^x+x-2=0$.

40. Calcular:

1) $4^{\log_{16}27}$; 2) $5^{\log_5 2}$; 3) $3^{\log_3 2-1}$.

41. Calcular sin utilizar las tablas, $10^{\frac{1}{2}-\lg 0{,}375\sqrt{10}}$

Resolver las ecuaciones:

42. $\left(2\sqrt{12}+3\sqrt{3}+6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}}=\sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$

43. $10^{\log_a(x^2-3x+5)}=3^{\log_a 10}$.

44. $(x^2-x-1)^{x^2-7x+2}=1$.

45. $x^{3\lg^2 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$. 46. $\lg[3+2\lg(1+x)]=0$.

47. $2\lg\lg x=\lg(7-2\lg x)-\lg 5$.

48. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}+2\log_3(x-3)\log_3(x+2)=\log_3^2(x-3)+\log_3^2(x+2)$.

49. $\sqrt[\frac{2}{9}-x]{m^{\frac{1}{3}+x}}=\sqrt[\frac{2}{9}+x]{m^{\frac{1}{3}-x}}\,\sqrt[\left(\frac{2}{9}\right)^2-x^2]{m^2}$; $m>0$ y $m\neq 1$.

50. $2^{\log_x(x^2-6x+9)}=3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$

51. $25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125$.

52. $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$.

53. $\lg 8+2\lg 4=\lg 2^{3x^2-2x+1}-\lg 12+2\lg\sqrt{3}$.

54. $\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=\frac{1}{2\sqrt{3}},\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=48.\end{cases}$ 55. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576;\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

56. $\log_x 5\sqrt{5}-1{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2$. 57. $\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$.

58. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$. 59. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$.

60. $0,2^{x^2-16x+37,5} = 5\sqrt{5}$. 61. $\sqrt[x^2-4]{2^{x^2-7x+12}} = (2^{x-5})^{x-5}$.

62. $4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

63. $2 \lg \left(\sqrt{x + \frac{x}{24}} + \sqrt{\frac{x}{24}}\right) - 1 = \lg 3 - \lg 2$.

64. $\lg^2 (100x) + \lg^2 (10x) + \lg x = 14$.

65. $4 \lg^2 \sqrt{ax} = \lg ax \ (a > 0)$.

66. $x + \lg (1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6$.

67. $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

68. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$. 69. $\lg^{-1} x = 2 + \lg x^{-1}$.

70. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} - 29 = 0$. 71. $3 + \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x$.

72. $16^{\log_x 2} = 8x$. 73. $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x$.

74. $x^{(\lg x)^2 - 3 \lg x + 1} = 10^3$. 75. $\log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$.

76. $3^{1+\lg \operatorname{ctg} x} - 3^{\lg \operatorname{tg} x + 1} + 8 = 0$. 77. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2 \log_2 x} + x \log_2 0,125 = 4$.

78. $(\sqrt[3]{x})^{\log_x (x^2+2)} = 2 \log_3 \sqrt{27}$. 79. $x^{2x} - (x^2 + x) \cdot x^x + x^3 = 0$.

80. Resolver las desigualdades:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (2x + 5) < -2$;

2) $\log_2 (3x + 2) - \log_2 (1 - 2x) > 2$;

3) $\log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1$;

4) $\log_3 |3 - 4x| > 2$;

5) $\log_{\frac{1}{2}} |2x - 3| > -3$;

6) $\log_2 (|x - 2|) - 1) > 1$;

7) $\log_2 \left(\left|\frac{x-2}{x-5}\right| + 7\right) > 3$;

8) $\log_3 (x - 1) + \log_3 (2 - 3x) > 2$.

81. Resolver gráficamente las ecuaciones (al construir las gráficas utilícense las tablas de valores de las funciones: e^x, e^{-x}, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, dadas al final del libro):

1) $e^x = 2 - x$; 2) $x^2 = e^{-x} + 1$; 3) $0,5 + x + \operatorname{sen} x = 0$;

4) $2 \cos x + \frac{x}{2} = 0$; 5) $1 + \lg x + \frac{x}{2} = 0$.

82. Resolver gráficamente las desigualdades:

1) $e^x > 3 - x$, 2) $e^{-x} + 1 < x$;

3) $\lg (x - 2) > 4 - x$;

4) $\lg \operatorname{sen} x > \frac{2x}{\pi} - 2 \ (0 < x < \pi)$.

83. Resolver los sistemas:

1) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24; \\ x + y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4^x = 16y, \\ 2^{x+1} = 4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40, \\ 64^{x+y} = 12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75, \\ 2 \lg x - \lg y = 2 \lg 2 + \lg 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512; \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y + \lg x = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} 1, \\ x^y = 2^{2 \log_{0,5} 10}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = \dfrac{2}{\pi} \left(\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right); \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-y}, \\ 3^{\log_9 x} = \dfrac{y}{3}. \end{cases}$

84. Resolver las desigualdades:

1) $\log_{0.5}\left(x^2 - x - \dfrac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5;$

2) $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1.$

CAPITULO XIV

REGLA DE CALCULO

Introducción. El aparato de cálculo más difundido entre los ingenieros y los técnicos es la regla de cálculo.

La regla de cálculo permite realizar las operaciones más variadas: multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación, búsqueda de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos dados y viceversa. En este caso se economiza considerablemente el tiempo y se facilita el cálculo. Empero, los resultados de todas las operaciones obtenidos mediante la regla son aproximados con una precisión de hasta tres cifras significativas.

§ 180. Partes de una regla de cálculo y denominaciones de las escalas

La regla de cálculo está compuesta de tres partes:

2) el cuerpo de la regla con las escalas;

2) la corredera, es decir, la parte móvil, que se desliza en la caja ad-hoc del cuerpo de la regla;

3) el cursor formado por un marco metálico con un cristal de aumento, que lleva un trazo visor para facilitar las lecturas. En la parte anterior o frontal de la regla y la corredera se encuentran las siguientes escalas (fig. 118):

1) La *escala de cubos* (marcada con la letra C), es la más superior.

2) La *escala de cuadrados* (marcada con la letra B), es la segunda de arriba; la misma está representada dos veces: una sobre el cuerpo de la regla (escala B) y la segunda, sobre la corredera (escala B_1).

3) La *escala fundamental* (marcada con la letra A), es la segunda de abajo; al igual que la escala de cuadrados, está marcada en el cuerpo (escala A) y en la corredera (escala A_1),

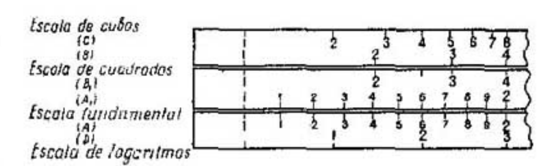


Fig. 118.

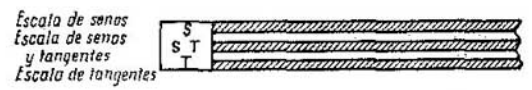


Fig. 119

4) La *escala de logaritmos* (marcada con la letra D), es la más inferior.

Las escalas fundamentales marcadas en el cuerpo y en la corredera coinciden en todas sus divisiones si ésta última no se desliza a derecha o a izquierda. Lo mismo se puede decir con respecto a las escalas de cuadrados en el cuerpo y en la corredera.

En el reverso de la corredera se tienen las siguientes escalas (fig. 119):

1) La *escala de senos* (marcada con la letra S), es la escala superior.

2) La *escala de* senos y tangentes (marcada con las letras S u T), es la escala media.

3) La *escala de tangentes* (marcada con la letra T), es la escala inferior.

§ 181. Escala logarítmica

Antes de pasar a estudiar las operaciones que se realizan con la regla, hay que saber cómo está construida la escala logarítmica, que constituye la base de la regla.

Tomemos la función $y = \lg x$. Si el argumento (x) varía de $x = 1$ a $x = 10$, el logaritmo de (y) varía de 0 a 1, puesto que $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$.

Tomemos convencionalmente un segmento de 250 mm de longitud como unidad y lo dividimos *proporcionalmente a los logaritmos de los números enteros de* 1 *a* 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Fig. 120.

Compongamos previamente la siguiente tabla:

x	$y = \lg x$	$250 \lg x$ (mm)	x	$y = \lg x$	$250 \lg x$ (mm)
1	0,0000	0,00	6	0,7782	194,6
2	0,3010	75,3	7	0,8451	211,3
3	0,4771	119,3	8	0,9031	225,8
4	0,6021	150,5	9	0,9542	238,6
5	0,6990	174,7	10	1,0000	250,0

Basándonos en esta tabla construimos la escala de la función $y = \lg x$.

Sobre una recta arbitraria tomamos el punto origen O. Frente a él marcamos el 1, ya que el valor inicial de x es igual a 1. A continuación, desde el punto O hacia la derecha llevamos sucesivamente los segmentos de longitud iguales a 75,3 mm, 119,3 mm, 150,5 mm, . . ., 250 mm; marcamos sus extremos con los correspondientes números 2, 2, 3, 4, . . ., 10. De este modo se ha obtenido la escala logarítmica, sobre la que se ha marcado por ahora sólo las divisiones mayores, o las divisiones de primer orden. En la fig. 120 se ha representado esta escala en tamaño menor. Para precisión de la escala hay que dividir el intervalo entre cada dos divisiones (cotas) adyacentes en 10 partes proporcionales a los logaritmos de los números intermedios. Por ejemplo, para obtener en la escala la cota 1,5 hay que llevar desde el origen un segmento igual a 250 mm $\cdot \lg 1,5 \approx$ $\approx 250 \cdot 0,176 \approx 44$ (mm). De un modo semejante se pueden marcar en la escala las cotas 1,6; 1,7, etc.; éstas serán divisiones de segundo orden, correspondientes a las fracciones décimas de la unidad.

Así, pues, las marcas en la escala logarítmica: 1, 2, 3, 4, . . ., 10 expresan de por sí números, mientras que los segmentos 1—2, es decir, desde la cota 1 hasta la cota 2, 1—3, 1—4, . . ., 1—10 expresan respectivamente los logaritmos de estos números, más exactamente, los números proporcionales a los logaritmos, donde el coeficiente de proporcionalidad es la escala; en este caso la escala $M = 250$ mm.

Se obtuvo una escala irregular, puesto que los logaritmos de los números no son proporcionales a los mismos números. La escala logarítmica de 250 mm se llama *normal*.

§ 182. Propiedades de la escala logarítmica

Una de las propiedades más importantes de la escala logarítmica es que ella es *periódica*.

Analicemos esta enunciación. Si la escala logarítmica 1, . . ., 10 la continuásemos hacia la derecha para los números 10, 20, 30, . . ., 100, tendríamos que llevar, desde el origen de la escala (desde la cota 1) hacia la derecha, segmentos iguales, más exactamente, proporcionales respectivamente a lg 20, lg 30, lg 40, . . ., lg 100. Pero $\lg 20 = 1 + \lg 2$, $\lg 30 = 1 + \lg 3$, etc. De aquí se aprecia que la construcción de una escala suplementaria nos conduciría a que, a la escala original, cuya longitud es igual a la escala, se le añadiría la misma escala. De manera exactamente igual se repetiría nuevamente la escala para los números de 100 a 1000, etc. Lo mismo se puede deducir con respecto a la escala para los números que se encuentran a la izquierda de 1, por ejemplo, para los números: 0,1; 0,2; 0,3; . . .; 1; la escala representada en la fig. 119 estaría desplazada hacia la izquierda en toda su longitud (250 mm).

Esto era de esperar, partiendo de las propiedades de los logaritmos decimales: los logaritmos de los números 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000, etc. tienen iguales mantisas, diferenciándose solamente en las características. Al realizar unas u otras operaciones con la regla, en realidad las hacemos con las mantisas, por eso es suficiente tener a mano una escala logarítmica de 1 a 10. Al calcular con la regla, el papel de las características lo juegan los órdenes, que se calculan sin la regla y permiten hallar el resultado buscado. De este modo, la propiedad de periodicidad permite sustituir la escala infinita por una de sus partes, por ejemplo, de 1 a 10.

§ 183. Divisiones en la escala fundamental

En la escala logarítmica fundamental las divisiones están marcadas de 1 a 2, a cada 0,01, es decir:

1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; etc.;

de 2 a 4, a cada 0,02:

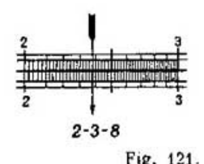


Fig. 121.

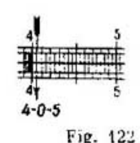


Fig. 122

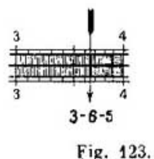


Fig. 123.

2,02; 2,04; 2,06; etc.; de 4 a 10, a cada 0,05: 4,05; 4,10; 4,15; etc.

Se admite decir que el «valor» de una división menor en la porción de 1 a 2 es igual a 0,01; el «valor» de la división menor en la porción de 2 a 4 es igual a 0,02, y en la porción de 4 a 10, es igual a 0,05.

§ 184. Instalación y lectura de los números en la escala fundamental

Antes de pasar a estudiar las distintas operaciones que se pueden realizar en la regla de cálculo es necesario saber establecer el número con ayuda del visor y leer el número que está debajo del trazo visor.

En este caso conviene recordar que en la regla de tipo normal se pueden poner o leer tres (raramente cuatro) cifras significativas sucesivas del número. Cuando se necesita poner en la regla un número con gran cantidad de cifras, previamente éste se debe redondear.

Al disponer el número ya redondeado no se tienen en cuenta los ceros que anteceden a la primera cifra significativa, y todos con que termina el número. Por ejemplo, la disposición de los números 238; 0,238; 238 000; 0,000238 será la misma en la regla. Cada uno de estos números lo consideramos en la regla como: 2—3—8. La fig. 121 muestra cómo hay que poner en la regla el número 2—3—8.

La primera cifra 2 corresponde a un número de divisiones mayores; la segunda cifra 3, a un número de divisiones de segundo orden; la tercera cifra 8, a un número de divisiones menores, es decir, a las divisiones de tercer orden, se han tomado 4, puesto que en el intervalo dado el valor de una división menor es igual a dos unidades de tercer orden.

En la fig. 122 se muestra la instalación del número 4—0—5. El cero refleja la falta de unidades de segundo orden.

Inversamente, si se quiere leer el número que está debajo del trazo visor, primero se lee la cifra inmediata de izquierda de primer orden, luego, la cifra inmediata de izquierda

de segundo orden, y la cifra de tercer orden, que en la mayoría de los casos se lee a ojo. La fig. 123 representa el número 3—6—5 bajo el trazo visor.

Recordemos que hasta que el trazo visor salga de los límites, por ejemplo, del intervalo 1—2, todas las lecturas comenzarán con la cifra 1. Lo mismo ocurre con las divisiones de segundo orden.

De manera exactamente igual se instalan y se leen los números en la escala rozante de la corredera (reglilla móvil), la que llamaremos escala A_1.

§ 185. Multiplicación en la regla

El producto de dos números en la regla de cálculo está basado en la suma gráfica de los logaritmos de estos números, puesto que

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

Examinemos dos casos.

1. Supongamos que se necesite multiplicar 2 por 3. Llevamos el trazo visor del cursor sobre la cota 2 de la escala fundamental A. Debajo del trazo visor colocamos la unidad, o sea, el origen de la escala A_1. A continuación deslizamos el cursor hasta llevar el trazo visor sobre la cota 3 de la escala A_1 y en la escala A leemos el producto 6.

Esta multiplicación está representada esquemáticamente en la fig. 124.

2. Supongamos querer multiplicar 8 por 5. Llevamos el trazo visor sobre la cota 8 de la escala A. Si colocamos bajo el trazo visor el origen de la escala A_1, tendremos que la cota 5 de la escala de la corredera A_1 resultará estar fuera de los límites de la escala A. Esto se comprende, puesto que al sumar las mantisas de los logaritmos de 8 y de 5 se obtendrá un número mayor que 1: $\lg 8 + \lg 5 = 0{,}903 + 0{,}699 = 1{,}602$. Medimos con un compás lo que excede la cota 5 de la escala A_1 fuera de los límites de la escala fundamental A y llevamos esta porción desde el origen de la escala A. Enfrente del extremo de esta porción o segmento se encuentra la cota 4 de la escala A. Esta lectura hay que aumentarla 10 veces, puesto que el número correspondiente al logaritmo 1,602 debe tener en la parte entera dos cifras. Al mismo resultado se llega más simplemente del siguiente modo: en lugar de la unidad inicial de la corredera colocamos el final de la corredera enfrente de la cota 8 de la escala A. Debajo de la cota 5 de la escala de la corredera leemos

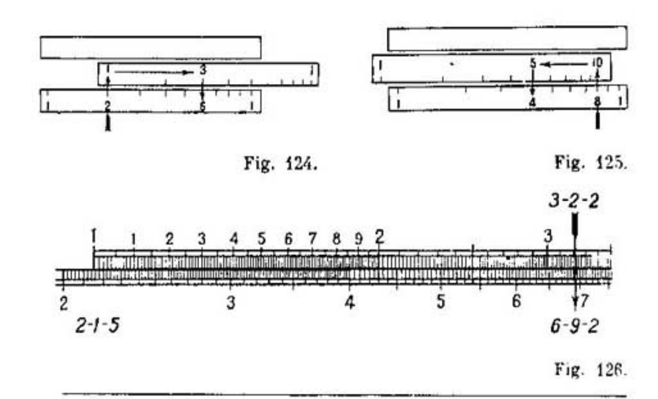


Fig. 124.

Fig. 125.

Fig. 126.

en la escala A el resultado 40. En la fig. 125 se muestra esquemáticamente esta multiplicación.

Los dos ejemplos antes expuestos han tenido como objeto explicar el principio de la multiplicación de números en la regla de cálculo.

Un caso más complejo de multiplicación es cuando el resultado no se puede obtener mentalmente, por ejemplo:

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2.$$

Como se aprecia de la fig. 126 el resultado es igual a 6—9—2. Surge la pregunta: ¿dónde hay que poner la coma? Se puede estimar aproximadamente el resultado obtenido redondeando los datos hasta una cifra significativa:

$$0{,}02 \cdot 30 = 0{,}60.$$

De este modo

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2 = 0{,}692.$$

Es evidente que la primera cifra del resultado denota las fracciones decimales. En los primeros tiempos se recomienda realizar, precisamente de este modo, un «cálculo» aproximado del resultado a esperar.

Cuando se quiere hallar el producto de un gran número de factores o realizar también otras operaciones, además de la multiplicación, surge la necesidad de estimar con otra regla la significación de la primera cifra, en el resultado,

es decir, la estimación de que la primera cifra significativa represente centenas, decenas o, puede ser, milésimas, etc. Establezcamos el concepto de orden del número.

§ 186. Sobre el orden de los números

En adelante convendremos en decir, por ejemplo, que
1) el número 183,4 tiene el orden +3;
2) el número 34,87 tiene el orden +2;
3) el número 8,53 tiene el orden +1;
4) el número 0,784 tiene el orden 0;
5) el número 0,0215 tiene el orden —1;
6) el número 0,00012 tiene el orden —3, etc.
En consecuencia, el *orden* de todo número positivo, mayor que la unidad, se caracteriza por el número de cifras de la parte entera, tomado con signo positivo.
La cantidad de ceros entre el cero de los enteros y la primera cifra significativa, tomada con signo negativo, se admite como orden de cualquier número positivo menor que la unidad.

Observación. El concepto de «orden del número N» y el concepto «característica del logaritmo del número N» no es el mismo. Por ejemplo, el orden del número 48,7 es el número 2, en tanto que la característica del lg 48,7 es igual a 1, es decir, el orden de un número es una unidad mayor que la característica del logaritmo del mismo número.

§ 187. Cálculo del orden

Si al multiplicar dos números la corredera se desplaza a la derecha, el orden del resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores menos la unidad. Si la corredera se desplaza hacia la izquierda, el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores.
Si el orden del multiplicando es m, y el orden del multiplicador es n, el orden del producto se calcula por el siguiente esquema:

Desplazamiento de la corredera al multiplicar	a derecha	a izquierda
Orden del producto	$m+n-1$	$m+n$

E j e m p l o 1. $3,\overrightarrow{2}\cdot 2,5 = 8,00$,

$1 + 1 - 1 = 1$.

La corredera se desplaza a la derecha, lo que está indicado por una flecha, por eso el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores menos 1.

E j e m p l o 2. $\overleftarrow{45}\cdot 8,2 = 369$,

$2 + 1 = 3$.

La corredera se desplaza a la izquierda, lo que está indicado por una flecha, por eso el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores.
Si se desea multiplicar varios números, se recomienda fijar el desplazamiento de la corredera en cada multiplicación poniendo la flecha dirigida hacia el lado de desplazamiento de la misma.

E j e m p l o 3. $0,00\overleftarrow{75}\cdot 4,\overleftarrow{2}\cdot 4,\overrightarrow{3}\cdot 150 = 20,3$,

$-2 + 1 + 1 + 3 - 1 = 2$.

Al multiplicar la corredera se desplaza dos veces a la izquierda y una vez a la derecha, por eso el orden del resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores menos una unidad.

Observación. Cabe señalar que si el producto de las primeras cifras significativas es igual a 10 o mayor que 10, la corredera se desplazará, sin duda, a la izquierda. Por ejemplo: $4,8\cdot 0,327$; $54,8\cdot 2,1$, etc.

§ 188. División

Puesto que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, la división en la regla se reduce a la sustracción gráfica de los logaritmos.

E j e m p l o 1. $6 : 3 = 2$.

D i s p o s i c i ó n. Disponemos con el visor el dividendo (6) en la escala A. Desplazamos la corredera de manera que el divisor (3) sobre ella resulta bajo el trazo visor.
Enfrente del origen de la escala de la corredera leemos en la escala A el resultado (2). Esta división está representada esquemáticamente en la fig. 127.

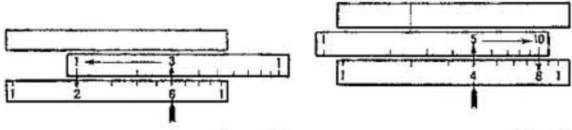


Fig. 127. Fig. 128.

Ejemplo 2. 40 : 5 = 8.
Disponemos con el visor la cota 4—0 en la escala A. Debajo de él hacemos coincidir la cota 5 de la escala de la corredera. Enfrente de la cota 10 (o bien 1) del extremo de la escala A_1 leemos en la escala A el resultado 8. Esquemáticamente esta división se muestra en la fig. 128.
El cálculo del orden de un cociente, si el orden del dividendo es m y el orden del divisor es n, se realiza por el siguiente esquema:

Desplazamiento de la corredera al dividir	a izquierda	a derecha
Orden del cociente	$m-n$	$m-n+1$

Ejemplos. $8{,}75 \overrightarrow{:} 0{,}0025 = 3500$; $4{,}7 \overleftarrow{:} 0{,}065 = 72{,}3$;
$1-(-2)+1=4$; $1-(-1)=2$.

Observación. Si la primera cifra del dividendo es mayor que la primera cifra del divisor, la corredera se desplaza a la derecha, y, en ese caso, al calcular el orden se agrega la unidad.

Ejemplo. $0{,}0842 : 42{,}1 = 0{,}002$;
$-1-2+1=-2$.

§ 189. Ejemplos de multiplicación y división

Ejemplo 1. $\dfrac{0{,}215\cdot 17{,}5}{0{,}019} = 198$.

Las flechas indican la sucesión de las operaciones: primero la división y luego la multiplicación.
En este ejemplo la división y la multiplicación se efectuaron con una instalación de la corredera, por eso el orden del

resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores del numerador menos el orden del denominador. En nuestro ejemplo tenemos:

$(0,\overrightarrow{215} : 0,\overrightarrow{019})\cdot 17,5.$

El cálculo del orden es:

$[0 - (-1) + 1] + 2 - 1 = 3.$

Ejemplo 2. $\dfrac{54,2\cdot 0,42}{0,0154} = 1480$

Dividiendo 54,2 : 0,0154 obtenemos el resultado enfrente de la unidad inicial de la corredera (no lo leemos). No logramos multiplicar el resultado obtenido por 0,42, puesto que la cota 4—2 en la corredera resulta estar fuera de los límites de la escala fundamental A. En este caso hay que «trasladar» la corredera, es decir, en lugar de la unidad de origen de la corredera debe ponerse la unidad final de ésta. Entonces, el orden es igual al orden del numerador menos el orden del denominador más la unidad, puesto que en la segunda operación (multiplicación) la corredera se desplaza a la izquierda.

Ejemplo 3. $\dfrac{0,486\cdot 0,007\cdot 26,4}{0,124\cdot 2,5} = 0,29.$

$\{[0,486 : 0,124)\cdot 0,007] : 2,5\}\cdot 26,4.$

Durante las operaciones fue necesario trasladar la corredera a la izquierda; por lo tanto, el orden del resultado final es igual al orden del numerador menos el orden del denominador más la unidad:

$0 + (-2) + 2 - (0 + 1) + 1 = 0.$

§ 190. Sobre las divisiones en la escala de cuadrados

La escala de cuadrados está compuesta de dos partes (escalas) iguales en longitud y completamente idénticas, que se suceden una a otra: la mitad izquierda y la mitad derecha. Cada una de ellas tiene una escala de 125 mm.

La mitad derecha comienza de la cota media indicada 1 (a veces 10) y termina con la cota 1 (a veces 100) al final de la escala de cuadrados.

En cada una de estas escalas existen divisiones de tres órdenes.
1. Las divisiones mayores que están marcadas con las cifras 1, 2, 3, . . ., 1. (A veces en la mitad derecha estas divisiones están marcadas con los números 10, 20, 30, . . ., 100).
Estas divisiones corresponden a la primera cifra significativa de un número de tres cifras.
2. Los intervalos entre divisiones, marcados con cifras, están divididos en 10 partes; además, estas nuevas divisiones en la porción 1—5 sobresalen algo más arriba (en la corredera) y más abajo (en la propia regla) de las bandas horizontales. En la porción 5—1 (10) estas divisiones, fuera de la quinta, no sobresalen de las bandas. Las nuevas divisiones indicadas corresponden a la segunda cifra significativa de un número de tres cifras.
3. Los intervalos entre las últimas divisiones se dividen en cinco partes (entre 1 y 2), o en dos partes (entre 2 y 5) o no se dividen en absoluto (entre 5 y 1). El valor de la división en la escala de cuadrados de 1 a 2 es igual a 0,02; de 2 a 5, igual a 0,05 y de 5 a 10, igual a 0,1.
De esta manera, en esta escala la tercera cifra significativa se hace necesario con frecuencia establecerla y leerla a ojo.

§ 191. Multiplicación y división en la escala de cuadrados

También se puede multiplicar y dividir en la escala de cuadrados. Se opera de igual modo que al calcular mediante la escala fundamental, sólo que los resultados, por así decir, son menos precisos.
Hay que distinguir dos casos de cálculo del orden al multiplicar en la escala de cuadrados. *Si el producto de dos factores no se encuentra en la misma subescala, en la que se ha tomado el primer factor, su orden es igual a la suma de los órdenes de ambos factores. Si el producto resulta en la misma subescala, en la que se tomó el primer factor, el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores menos la unidad.*

E j e m p l o s. 1) $2{,}4 \cdot 0{,}0075 = 0{,}018$. Cálculo del orden del resultado: $1 + (-2) = -1$.
2) $0{,}0018 \cdot 0{,}0345 = 0{,}0000621$. Cálculo del orden del resultado: $-2 + (-1) - 1 = -4$.
El cálculo del orden también tiene dos casos al dividir en la escala de cuadrados.

1 $\qquad$ *b Escala de cuadrados (B)*

1 $\qquad$ *a Escala fundamental (A)*

Fig. 129.

Si el cociente se encuentra a la derecha del dividendo, el orden del cociente es igual a la diferencia de los órdenes del dividendo y del divisor. Si el cociente se encuentra a la izquierda del dividendo, su orden es igual a la diferencia de los órdenes del dividendo y del divisor más la unidad.

E j e m p l o s. 1) $450 : 0{,}06 = 7500$. El cálculo del orden del resultado es: $3 - (-1) = 4$.
2) $3{,}6 : 2400 = 0{,}0015$. El cálculo del orden del resultado es: $1 - 4 + 1 = -2$.

§ 192. Elevación de un número al cuadrado

Supongamos que frente a la cota a de la escala fundamental A se encuentra la cota b de la escala de cuadrados B (fig. 129).

Esto significa que la porción desde 1 hasta a es igual a la porción de 1 a b. Pero la porción de 1 a a es igual a 250 lg a mm, puesto que el tamaño de la escala fundamental de la regla es igual a 250 mm. La porción de 1 a b de la escala de cuadrados es igual a 125 lg b mm, puesto que el tamaño de la escala de cuadrados es de 125 mm, como se dijo antes.
Basándonos en la igualdad de las porciones de 1 a a y de 1 a b, tenemos

$$250 \lg a = 125 \lg b,$$

o bien

$$2 \lg a = \lg b,$$

o bien

$$\lg a^2 = \lg b,$$

de donde

$$a^2 = b.$$

De este modo, *enfrente de cualquier lectura (cota) de la escala fundamental A en la escala B se encuentra el cuadrado de este número.*

Observación. Al elevar al cuadrado no interviene la corredera.

DISPOSICION AL ELFVAR UN NUMERO AL CUADRADO

1. Marcamos en la escala fundamental con el visor del cursor el número que se debe elevar al cuadrado.
2. Leemos en la escala de cuadrados, bajo el visor, el cuadrado del número dado.
El orden del cuadrado del número dado se determina del siguiente modo:
a) si el cuadrado del número dado se encuentra en la mitad derecha de la escala de cuadrados, el orden del resultado es igual a $2m$, donde m es el orden de la base;
b) si el cuadrado del número dado se lee en la mitad izquierda de la escala de cuadrados, su orden es igual a $2m - 1$:

Orden del número que se eleva al cuadrado	Orden del cuadrado, si éste se encuentra	
	en la mitad izquierda	en la mitad derecha
m	$2m-1$	$2m$

E j e m p l o s. 1) $200^2 = 40\,000$. Cálculo del orden $3 \cdot 2 - 1 = 5$.
2) $0{,}00855^2 \approx 0{,}000073$. Cálculo del orden $(-2) \cdot 2 = -4$.
3) $0{,}0295^2 \approx 0{,}00087$.
4) $0{,}604^2 \approx 0{,}365$.
5) $1{,}08^2 \approx 1{,}17$.

§ 193. Extracción de la raíz cuadrada de un número

Antes de proceder a la extracción de la raíz cuadrada en la regla, dividimos el número subradical (radicando) en grupos de dos cifras cada uno, comenzando de la coma a izquierda y a derecha. Si el último grupo a la derecha de la coma es incompleto, le adjudicamos a éste un cero. El primer grupo de la izquierda puede resultar también incompleto.

En el caso de una fracción decimal propia al primer grupo de la izquierda lo vamos a considerar un grupo que sigue a grupos puramente de ceros; éste puede comenzar de cero y en ese caso se considera incompleto.
Por ejemplo, en la fracción 0.00268 el primer grupo de la izquierda 26 es completo, en tanto que en la fracción 0,000169 el primer grupo de la izquierda 01 es incompleto.
Los ceros que anteceden las cifras significativas en la fracción decimal, como ya se dijo, no se toman en cuenta en la disposición. Estos se consideran al determinar el lugar de la coma en la respuesta, o sea, en la raíz.

Observación. Al extraer la raíz cuadrada de un número, de igual modo que al elevar al cuadrado, la corredera no interviene.

DISPOSICION AL EXTRAER LA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO

1. Señalamos en la escala de cuadrados con el visor del cursor las tres primeras cifras significativas (redondeadas) del número subradical; además, si el primer grupo de izquierda es completo, esta disposición o instalación del cursor la efectuamos en la mitad derecha; si el primer grupo es incompleto, la instalación la efectuamos en la mitad izquierda.
2. En la escala fundamental leemos las cifras de la raíz buscada: esta raíz está señalada por el mismo visor del cursor.

Esquemáticamente la disposición en la regla al extraer la raíz cuadrada de un número se anota del modo siguiente:

Primer grupo izquierdo	Mitad de la escala de cuadrados, en la que se dispone el número subradical
Incompleto 189, 0,0235, 0,00024	Izquierda
Completo 0,0012, 0,45, 0,4	Derecha

Para disponer el número subradical en la regla conviene, utilizando la tabla de multiplicación, determinar la primera

cifra de la raíz, es decir, extraer la raíz del primer grupo del radicando, y escribirla en su lugar en la raíz; esta cifra permite controlar la justeza de la disposición en la regla. El número de cifras en la parte entera o el lugar de la coma en la fracción decimal propia de la raíz cuadrada buscada se determina según la siguiente regla:
Para los números mayores que la unidad, la cantidad de cifras en la parte entera de la raíz es igual al número de grupos (completos e incompletos) de la parte entera del radicando; para los números menores que la unidad, la cantidad de ceros después de la coma es igual al número de grupos puramente de ceros en el radicando.

E j e m p l o s.

$\sqrt{49'00} = 70$; $\sqrt{72',5} = 8,52$;

$\sqrt{7',25} = 2,69$; $\sqrt{0',00'00'35'5'} = 0,00596$;

$\sqrt{0',00'01'69} = 0,013$; $\sqrt{0',00'26'8} = 0,052$.

§ 194. Elevación de un número al cubo

En este caso utilizamos la escala de cubos (escala *C*).
La escala de cubos está dividida en tres subescalas consecutivas completamente iguales (izquierda, media y derecha). Las divisiones en cada una de estas subescalas tienen el mismo carácter que las subescalas de cuadrados, sólo que las primeras son respectivamente menores, puesto que el tamaño de la escala de cubos es igual a $\frac{250}{3}$ mm.

Observación. Cuando se eleva al cubo la corredera no interviene.

DISPOSICION AL ELEVAR UN NUMERO AL CUBO

1. Señalamos con el visor del cursor en la escala fundamental el número que se quiere elevar al cubo.
2. Leemos en la escala de cubos el cubo del número dado; éste está señalado por el mismo visor.
El orden del cubo de un número se determina por el siguiente esquema según en cuál de las tres subescalas de cubos se lee el mismo:

Orden del número a elevar al cubo	Orden del cubo de un número, si se encuentra		
	en la subescala izquierda	en la subescala media	en la subescala derecha
m	$3m-2$	$3m-1$	$3m$

E j e m p l o s. 1) $20^3 = 8000$. Cálculo del orden: $2 \cdot 3 - 2 = 4$.
2) $0{,}003^3 = 0{,}000000027$. Cálculo del orden: $-2 \cdot 3 - 1 = -7$.
3) $50^3 = 125\,000$. Cálculo del orden: $2 \cdot 3 = 6$.
4) $0{,}123^3 = 0{,}00966$. Cálculo del orden: $0 \cdot 3 - 2 = -2$.

§ 195. Extracción de la raíz cúbica de un número

Para disponer el número subradical en la regla lo dividimos en grupos de tres cifras cada uno, comenzando de la coma a derecha e izquierda. Si el último grupo a la derecha de la coma es incompleto, hay que añadirle uno o dos ceros para que el grupo sea completo. El primer grupo de izquierda puede ser incompleto, es decir, contener una o dos cifras. Conviene hacer notar que en el caso de una fracción decimal propia el primer grupo de izquierda se considera el que sigue los grupos puramente de ceros. Este grupo puede comenzar con uno o dos ceros y, en ese caso, éste también se considera incompleto; en consecuencia, los ceros de delante no se toman en cuenta como cifras.
Antes de pasar a disponer en la regla el número subradical, hay que aclarar si el primer grupo de la izquierda es completo o incompleto, y si es incompleto, contiene una o dos cifras.

Observación. Al extraer la raíz cúbica de un número la corredera no interviene.

DISPOSICION AL EXTRAER LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO

1. Según la cantidad de cifras del primer grupo de izquierda del número subradical la disposición de éste en la escala de cubos mediante el visor se realiza por el siguiente esquema:

Cantidad de cifras en el primer grupo de izquierda	una	dos	tres
Subescala de cubos, en la que se dispone el número	izquierda	media	derecha
Ejemplos	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{216}$
	$\sqrt[3]{1'728}$	$\sqrt[3]{42'300}$	$\sqrt[3]{156'000}$
	$\sqrt[3]{0',005}$	$\sqrt[3]{0',012}$	$\sqrt[3]{0',125}$
	$\sqrt[3]{0',000'002}$	$\sqrt[3]{0',000'095}$	$\sqrt[3]{0',000'125}$

2. El número buscado, o sea la raíz cúbica, se lee en la escala fundamental, donde está señalado por el mismo visor.

El número de cifras en la parte izquierda de la raíz cúbica buscada, así como el lugar de la coma en él, si es una fracción decimal propia se determinan por la siguiente regla:
Para los números mayores que la unidad, la cantidad de cifras en la parte entera de la raíz cúbica es igual a la cantidad de grupos en la parte entera del número subradical;
para las fracciones decimales propias la cantidad de ceros, después de la coma, en la raíz cúbica es igual a la cantidad de grupos puramente de ceros en el número subradical.

Ejemplos.

$\sqrt[3]{8000} = 20$; $\quad \sqrt[3]{0,008} = 0,2$;

$\sqrt[3]{0',000'027} = 0,03$; $\quad \sqrt[3]{0,036} = 0,33$;

$\sqrt[3]{125'000'000} = 500$; $\quad \sqrt[3]{0,7} = 0,888$.

§ 196. Operaciones combinadas elementales

Durante los cálculos nos encontramos frecuentemente con expresiones que contienen varias operaciones. En tal caso conviene efectuar las disposiciones en la regla que conduzcan rápidamente al fin deseado.

Examinemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular $3{,}5^2 \cdot 720$.
Aquí la disposición es la siguiente: señalamos con el visor del cursor 3,5 en la escala fundamental. Multiplicamos por 720 en la escala de cuadrados llevando la unidad final de la corredera bajo el trazo visor, es decir, haciéndola coincidir con el cuadrado del número 3,5. A continuación en la escala de cuadrados hallamos la respuesta: 8800 (enfrente del número 720 en la escala de cuadrados de la corredera).

Ejemplo 2. Calcular $\frac{2{,}3^2 \cdot 0{,}56}{0{,}0125}$.
Disponemos 2,3 en la escala fundamental y luego todo el cálculo se realiza en la escala de cuadrados. Respuesta: 237.

Ejemplo 3. Calcular $\frac{\sqrt{3{,}85} \cdot 0{,}48}{25{,}6}$.
Se calcula del siguiente modo: señalamos con el visor del cursor el número 3,85 en la subescala izquierda de la escala de cuadrados, y llevamos bajo el visor el número 25,6 tomado de la escala fundamental de la corredera. Después de esto fijamos en la escala fundamental de la corredera mediante el visor el número 48. En esta posición el visor indica en la escala fundamental de la regla la respuesta buscada: 0,0368.

Ejemplo 4. Calcular $\frac{3{,}35 \sqrt[3]{44{,}4}}{17{,}8 \cdot 0{,}09}$.
Comenzamos el cálculo disponiendo la raíz cúbica de 44,4. Descendiendo por el visor a la escala fundamental, en ella finalizamos el cálculo por analogía con el ejemplo 3. Respuesta: 7,40.

Ejemplo 5. Calcular $\left(\frac{108 \cdot 0{,}208}{3{,}08}\right)^3$.
La expresión entre paréntesis se calcula en la escala fundamental y la respuesta la leemos en la escala de cubos. Ella está señalada por el visor en su última posición alcanzada en el cálculo del paréntesis. Respuesta: 388.

Ejemplo 6. Calcular $\sqrt{\frac{48{,}8 \cdot 0{,}00506}{12{,}6 \cdot 0{,}0304}}$.
Está claro que todo el cálculo del radicando conviene realizarlo en la escala de cuadrados, para leer la respuesta final en la escala fundamental bajo la última posición del trazo visor. Respuesta: 0,803

Ejemplo 7. En los problemas de carácter aplicado a veces se tropieza con la expresión de tipo $a^{2/3}$. Aquí el

cálculo está basado en que $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$. En tal caso extraemos la raíz cúbica de a, utilizando la escala de cubos, y la respuesta final la leemos directamente en la escala de cuadrados, sin descender la vista hasta la escala fundamental.

Por ejemplo,

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4.$$

Calcular $42{,}5^{\frac{2}{3}}$. Disponemos 42,5 en la escala de cubos, y en la escala de cuadrados el mismo trazo visor indica la respuesta: 12,2.

E j e m p l o 8. Calcular $(0{,}53)^{\frac{3}{2}}$.

En este ejemplo con el visor del cursor establecemos en la escala de cuadrados 0,53 y en la escala de cubos el mismo visor indica la respuesta: 0,385. No hace falta descender la vista hasta la escala fundamental.

§ 197. Búsqueda de los logaritmos decimales de los números

La escala de logaritmos (escala inferior) es una tabla de mantisas de logaritmos.

DIVISION EN LA ESCALA DE LOGARITMOS

La escala de logaritmos D, a diferencia de las demás escalas, es uniforme. Tiene 10 divisiones señaladas con cifras. Estas divisiones corresponden a la primera cifra de la mantisa del logaritmo. A diferencia de las restantes escalas, la primera división de izquierda es 0 y no 1.

Cada uno de los intervalos entre las divisiones indicadas está dividido también en 10 partes. Estas nuevas divisiones, que sobresalen un poco de la horizontal, corresponden a la segunda cifra de la mantisa del logaritmo.

Cada uno de los intervalos entre las últimas divisiones está dividido en cinco partes. De este modo, el valor de cada una de estas divisiones es igual a dos unidades de la tercera cifra significativa de la mantisa. Utilizando la escala D, se puede realizar cualquier tipo de operación, que requiere el uso de las tablas de logaritmos.

Observación. La corredera no participa al buscar los logaritmos de los números mediante la regla de cálculo.

DISPOSICION EN LA REGLA AL BUSCAR LA MANTISA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO

1. Señalamos con el visor del cursor el número dado en la escala fundamental.
2. El mismo visor indica en la escala de logaritmos la mantisa del logaritmo buscada.

Ejemplos. 1) $\lg 6750 = 3{,}830$; 2) $\lg 3{,}14 = 0{,}497$; 3) $\lg 0{,}00873 = \bar{3}{,}941$.

§ 198. Hallar con la regla de cálculo un número dado su logaritmo

Observación. Al hallar un número dado su logaritmo la corredera no interviene.

DISPOSICION AL HALLAR UN NUMERO DADO SU LOGARITMO

1. Señalamos con el visor del cursor la mantisa del logaritmo dado en la escala de logaritmos.
2. En esa posición el visor indica simultáneamente, en la escala fundamental, las tres primeras cifras (a veces también cuatro) del número buscado. El lugar de la coma en este número o la cantidad de ceros después de las cifras halladas se determina por la característica del logaritmo del número dado de acuerdo a las reglas del álgebra.

Ejemplos. 1) $\lg x = 4{,}398$, $x = 25\,000$; 2) $\lg z = \bar{2}{,}714$, $z = 0{,}0518$; 3) $\lg N = 0{,}420$, $N = 2{,}63$.

§ 199. Ejemplos de cálculos con la escala de logaritmos

No tiene sentido calcular en la regla, mediante la escala de logaritmos, expresiones que contengan sólo multiplicación, división, potencias simples (cuadrados, cubos) o raíces cuadradas y cúbicas. Estas se calculan más simplemente con las escalas antes examinadas.
La escala de logaritmos se utiliza fundamentalmente al calcular expresiones exponenciales complejas o expresiones que contienen logaritmos.
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular la expresión $2{,}57^{0{,}344}$. Tenemos que:

$x = 2{,}57^{0{,}344}$.

Hallamos:

$\lg x = \lg (2{,}57^{0{,}344}) = 0{,}344 \lg 2{,}57 = 0{,}344 \cdot 041$.

Multiplicando en la regla, obtendremos

$\lg x = 0,141$,

de donde

$x = 1,38$.

E j e m p l o 2. Calcular $x = 0,00256^{0,00256}$. Procedemos a la logaritmación de ambos miembros. Obtendremos:

$\lg x = \lg\ (0,00256^{0,00256}) = 0,00256\ \lg\ 0,00256 =$
$= 0,00256 \cdot \bar{3},408$.

El logaritmo de característica negativa y mantisa positiva lo representamos en forma de una fracción decimal negativa. Tendremos que:

$\bar{3},408 = -3 + 0,408 = -2,592$.

Después de esto continuamos el cálculo:
$\lg x = 0,00256 \cdot (-2,592) = -0,00663$.

Transformamos el logaritmo obtenido de manera que su mantisa sea positiva, y la característica negativa. Obtendremos:

$\lg x = \bar{1},993$,

de donde

$x = 0,985$.

E j e m p l o 3. Calcular $A = \left(\frac{231}{482}\right)^{0,41}$. Tendremos que:

$\lg A = \lg\ \left(\frac{231}{482}\right)^{0,41} = 0,41 \lg \frac{231}{482}$.

La fracción $\frac{231}{482}$ no se expone a logaritmación. Dividimos en la escala fundamental 231 por 482 y frente al final de la corredera leemos en la escala de logaritmos la mantisa del logaritmo del cociente 68; la característica de este logaritmo es igual a -1. Por lo tanto, tendremos que
$\lg A = 0,41 \cdot \bar{1},68 = 0,41\ (-0,32) = -0,132 = \bar{1},868$,
de donde

$A = 0,738$.

E j e m p l o 4. Calcular

$v = 4,8 \left(\frac{20,5}{135}\right)^{\frac{1}{7}}$.

Al principio dividimos 20,5 por 135 y el cociente obtenido lo ponemos en la expresión dada. Así, obtendremos:

$$v = 4{,}8 \cdot 0{,}152^{\frac{1}{7}}.$$

Con la logaritmación de ambos miembros, tendremos:

$$\lg v = \lg\ 4{,}8 + \frac{1}{7} \lg 0{,}152 = 0{,}681\ \ + \frac{1}{7}\ \ \cdot \bar{1}{,}182\ =$$
$$= 0{,}681 + \bar{1}{,}883 = 0{,}564,$$

de donde

$$v = 3{,}66.$$

Ejemplo 5. Calcular

$$v = \frac{9{,}5}{\sqrt[1{,}75]{2{,}45}}.$$

Tenemos:

$$\lg v = \lg 9{,}5 - \frac{\lg 2{,}45}{1{,}75} = 0{,}978 - \frac{0{,}389}{1{,}75} = 0{,}978 - 0{,}222 =$$
$$= 0{,}756,$$

de donde

$$v = 5{,}70.$$

Ejemplo 6. $v = \dfrac{43{,}5}{0{,}75^{0{,}67} \cdot 6{,}5^{0{,}22}}$.

Tomando logaritmos, tendremos

$$\lg v = \lg 43{,}5 - (0{,}67 \cdot \lg 0{,}75 + 0{,}22 \lg 6{,}5) =$$
$$= 1{,}638 - (0{,}67 \cdot \bar{1}{,}875 + 0{,}22 \cdot 0{,}813) =$$
$$= 1{,}638 - [0{,}67 \cdot (-0{,}125) + 0{,}179] =$$
$$= 1{,}638 - 0{,}095 = 1{,}543,$$

de donde

$$v = 34{,}9.$$

§ 200. Cálculo de la superficie del círculo y el problema inverso

Además de las divisiones de carácter general, muchas reglas de cálculo tienen rayas que indican números frecuentemente encontrados en los cálculos. Por ejemplo, en la escala fundamental y en la escala de cuadrados del cuerpo de la regla y de la corredera se indica especialmente el número π. Al comienzo de la escala fundamental de la corredera (entre las cotas 11 y 12) se tiene la raya c, que sirve para el cálculo de la superficie del círculo.

La superficie del círculo S puede expresarse mediante su diámetro d del siguiente modo:

$$S=\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Como se aprecia, la magnitud $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ se ha designado por c. En consecuencia, tenemos que:

$$c=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\approx 1{,}128.$$

Dado el diámetro, la superficie del círculo se determina mediante la raya c del siguiente modo:
1. Señalamos en la escala fundamental de la regla, mediante el visor del cursor, el diámetro dado.
2. Deslizamos la corredera de manera que la cota c quede bajo el visor del cursor.
3. Enfrente del comienzo o del final de las divisiones de la corredera leemos en la escala de cuadrados la superficie buscada.

El orden de la superficie del círculo se determina como el orden del cuadrado de un número. Si el orden del diámetro se designa por m, el orden de la superficie del círculo se determina conforme al siguiente esquema:

La superficie del círculo se encuentra en la escala de cuadrados	Al final de las divisiones de la corredera en la mitad derecha	Enfrente del comienzo de las divisiones de la corredera	
		en la mitad izquierda	en la mitad derecha
Orden de la superficie del círculo	$2m-2$	$2m-1$	$2m$

Ejemplos: 1) $d=103$ m, $S=8330$ m^2;
2) $d=0{,}195$ m, $S=0{,}0299$ m^2;
3) $d=457$ m, $S=164\,000$ m^2.

Para hallar el diámetro del círculo dada su superficie procedemos del siguiente modo:
1. Señalamos en la escala de cuadrados con el visor del cursor la superficie dada del círculo.
2. Llevamos bajo el visor del cursor el comienzo o el final de las divisiones de la corredera.

3. Enfrente de la raya c de la corredera hallamos en la escala fundamental el diámetro buscado.
El orden del diámetro del círculo se determina como el orden del producto $c\sqrt{S}$, donde S es la superficie del círculo.

Ejemplos. 1) $S = 57{,}7$ m², $d = 8{,}57$ m;
2) $S = 8330$ m², $d = 103$ m.
El cálculo de la superficie del círculo según su diámetro mediante la raya (cota) c permite calcular simplemente una serie de expresiones relacionadas con esta superficie.

Ejemplo 1. Calcular el volumen de un cilindro circular conociendo el diámetro de su base d y la altura del mismo H. Tenemos la siguiente fórmula para el volumen del cilindro:

$$V = S \cdot H = \frac{\pi d^2}{4} H, \text{ ó } V = \left(\frac{d}{c}\right)^2 H.$$

La disposición al calcular el volumen del cilindro por esta fórmula está clara. La superficie del círculo hallada según el diámetro dado en la escala de cuadrados la multiplicamos por H y obtendremos, de este modo, el volumen buscado en la escala de cuadrados.
Por ejemplo, si $d = 20{,}3$ dm y $H = 4{,}5$ dm, tendremos que $V = 1460$ dm³.

Ejemplo 2. Dado el diámetro de una esfera d calcular su superficie Q.
Para la superficie de una esfera Q tenemos la fórmula

$$Q = 4\pi \frac{d^2}{4}, \text{ o bien } Q = 4\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Disposición. Conforme al diámetro dado hallamos en la escala de cuadrados el área del círculo, que inmediatamente la multiplicamos por 4.
Por ejemplo, la superficie Q de una esfera de diámetro $d = 31{,}5$ cm se expresa del siguiente modo:

$Q = 3120$ cm².

Ejemplo 3. Conocido el diámetro de la esfera d, calcular su volumen. La fórmula del volumen de la esfera es

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

o bien

$$V = \frac{2}{3}\frac{\pi d^3}{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) d = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{c}\right)^2 d.$$

D i s p o s i c i ó n. Hallamos en la escala de cuadrados el área del círculo mayor de la esfera dada y la multiplicamos por $\frac{2}{3}\,d$. Por ejemplo, el volumen de una esfera de diámetro igual a 146 cm es de 1 630 000 cm³.

§ 201. Escala de senos

En el borde superior del reverso de la corredera se encuentra la escala de senos S. En ella las longitudes de los segmentos de la escala, contadas desde su comienzo, son proporcionales a la suma $(1 + \lg \operatorname{sen} x)$, puesto que la escala está construida para la función

$$l = 250\,(1 + \lg \operatorname{sen} x).$$

La escala de senos contiene divisiones desde 5°44′ hasta 90°. El valor de cada división menor está dado en la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de una división menor	Intervalo	Valor de una división menor
de 5°44′ a 10°	5′	de 40° a 70°	30′
de 10° a 20°	10′	de 70° a 80°	1°
de 20° a 40°	20′	de 80° a 90°	2,5°

Como se aprecia de la tabla expuesta, el valor de una división menor es variadísimo, es decir, la escala de senos resulta ser heterogénea, y al principio hay que acostumbrarse a sus divisiones para poner después con certeza los ángulos dados y leer rápidamente los ángulos correspondientes al valor dado del seno.

§ 202. Determinación del seno de un ángulo comprendido entre 5°44′ y 90°

DISPOSICION

1. Volvemos la regla al reverso.
2. Deslizamos la corredera hacia la derecha de manera que el ángulo dado en la escala de senos S resulte enfrente de la marca hecha en el recorte de la regla.
3. Damos vuelta la regla hacia el lado frontal.
4. En la escala fundamental de la corredera A_1 leemos enfrente de la unidad final (o bien 10) de la escala fundamental

de la regla A el valor del seno, recordando que la primera cifra significa las fracciones decimales.

E j e m p l o s. 1) sen 20° = 0,342; 2) sen 41°30′ = 0,663; 3) sen 65°30′ = 0,910.

§ 203. Determinación del ángulo según su seno si el orden del seno es 0

DISPOSICION

1. Mantenemos ante sí la parte frontal de la regla.
2. Deslizamos la corredera hacia la derecha de manera que en su escala fundamental A_1 el valor dado del seno resulte enfrente de la unidad final (o bien 10) de la escala A.
3. Volvemos la regla al reverso y en el recorte derecho de la regla, enfrente de la marca, leemos el ángulo en la escala de senos S.

E j e m p l o s. 1) sen $x = 0{,}45$, $x = 26°40'$; 2) sen $\alpha =$ $= 0{,}196$, $\alpha = 11°15'$; 3) sen $y = 0{,}898$, $y = 64°$.

§ 204. Determinación de la tangente de un ángulo comprendido entre 5°44′ y 45°

Utilizamos la escala de tangentes T que se encuentra en el borde inferior del reverso de la corredera. Esta escala contiene divisiones desde 5°44′ hasta 45°; además en el intervalo de 5°44′ a 20° las divisiones están trazadas cada 5′, en el intervalo de 20° a 45° el valor de una división menor es de 10′.

DISPOSICION

1. Damos vuelta la regla al reverso.
2. Deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que el ángulo dado, tomado en la escala de tangentes, resulte en el recorte izquierdo de la regla, enfrente de la incisión.
3. Damos vuelta la regla y en la parte frontal, frente a la unidad inicial de la escala A, leemos el resultado en la escala A_1. Delante del número leído hay que poner el cero entero y la coma.

E j e m p l o s. 1) tg 17° = 0,306; 2) tg 42°30′ = 0,916; 3) tg 8°40′ = 0,152.

§ 205. Determinación de un ángulo por el valor dado de la tangente, si el orden de la tangente es igual a cero

DISPOSICION

1. Deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que el valor de la tangente, tomado en la escala A_1, resulte enfrente de la unidad inicial de la escala A.
2. Damos vuelta la regla al reverso y en la escala T, frente a la marca del recorte de izquierda leemos el ángulo.
E j e m p l o s. 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}348$, $x = 19°10'$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}85$, $\alpha = 40°20'$; 3) $\operatorname{tg} y = 0{,}152$, $y = 8°40'$.

§ 206. Determinación de la tangente del ángulo α si $45° < \alpha < 48°17'$

DISPOSICION

1. Damos vuelta la regla y deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que enfrente de la marca del recorte, de izquierda, en la escala T se encuentre el ángulo suplementario al dado.
2. Damos vuelta la regla hacia el lado frontal y en la escala fundamental de la regla A, enfrente de la unidad final de la escala de la corredera A_1 leemos el valor de la tangente, recordando que la primera cifra significa las unidades enteras.

E j e m p l o s. 1) $\operatorname{tg} 48°30' = 1{,}13$; 2) $\operatorname{tg} 65°10' = 2{,}16$; 3) $\operatorname{tg} 83° = 8{,}14$.

Observación. Si hay que resolver el problema inverso, es decir, dado el valor de la tangente hallar el correspondiente ángulo, las operaciones se realizan en el orden inverso.

E j e m p l o. Dada la $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}54$, hallar α.
1. Disponemos con el visor 2—5—4 en la escala A y llevamos bajo el trazo visor la unidad final (10) de la escala A_1 de la corredera.
2. Damos vuelta la regla y en el recorte izquierdo, enfrente de la marca leemos el ángulo de 21°30'. Por lo tanto,

$$\alpha = 90° - 21°30' = 68°30'.$$

§ 207. Determinación del seno y de la tangente de ángulos pequeños ($44' < \alpha < 5°44'$)

Si el ángulo α es pequeño y no supera $5°44'$, su seno y tangente se diferencian muy poco entre sí, y sus tres primeras cifras decimales coinciden; prácticamente se pueden considerar iguales entre sí. Por eso, en el reverso de la corredera, en la parte media, se encuentra la escala común para el seno y la tangente de ángulos pequeños, o sea, la escala *ST*.

El valor de cada división menor de esta escala está dado en la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de la división menor
de 44′ a 3°	1′
de 3° a 5°	2′
de 5° a 5°44′	5′

Al utilizar esta escala, al igual que la escala de senos, hay que recordar que el orden del seno o de la tangente es igual a -1.

E j e m p l o s. 1) sen $2°40' = 0{,}0465$; 2) tg $3°20' = 0{,}0582$.

Inversamente, si dado el valor del seno o de la tangente, de orden -1, hay que hallar el correspondiente ángulo, deslizamos la corredera hacia la derecha y ponemos con el trazo visor el valor del seno o de la tangente en la escala A_1 enfrente de la unidad final de la escala A; damos vuelta la regla y en el reverso, en el recorte derecho, frente a la marca hallamos la magnitud del ángulo en la escala media para los senos y las tangentes.

E j e m p l o s. 1) sen $x = 0{,}0435$, $x = 2°30'$; 2) tg $y = 0{,}0740$, $y = 4°15'$.

Observación. Si mediante la regla de cálculo hay que hallar el coseno o la cotangente de un ángulo, buscaremos respectivamente el seno o la tangente del ángulo suplementario.

▲ Ejercicios

Calcular mediante la regla de cálculo

1. 1) $450 \cdot 48$; 2) $21{,}4 \cdot 2{,}38$; 3) $72{,}5 \cdot 0{,}306$; 4) $358 \cdot 472$; 5) $1{,}46 \cdot 0{,}0298$; 6) $51{,}5 \cdot 1{,}62$; 7) $0{,}202 \cdot 3{,}03$; 8) $8{,}05 \cdot 423$; 9) $419 \cdot 0{,}0358$; 10) $0{,}0177 \times \times 0{,}00785$; 11) $2{,}57 \cdot 0{,}00305$.

2. 1) $485 : 655$; 2) $62{,}5 : 1{,}25$; 3) $42{,}5 : 3{,}06$; 4) $0{,}305 : 0{,}00675$; 5) $246 : 0{,}188$; 6) $0{,}107 : 0{,}00315$; 7) $4{,}07 : 0{,}00805$; 8) $52\,300 : 19{,}8$; 9) $0{,}0344 : 75$; 10) $0{,}0404 : 3{,}25$; 11) $0{,}0543 : 0{,}00743$; 12) $2{,}02 : 0{,}001435$.

3. 1) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 1{,}07$; 2) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 4{,}3$; 3) $14{,}5 \cdot 0{,}00191 \cdot 7{,}78$; 4) $6{,}66 \cdot 5{,}55 \cdot 0{,}223$.

4. 1) $\frac{432 \cdot 0{,}0218}{0{,}00555}$; 2) $\frac{1{,}05 \cdot 42{,}4}{157}$; 3) $\frac{5{,}15 \cdot 0{,}0243}{0{,}00555 \cdot 66{,}8}$; 4) $\frac{0{,}0743 \cdot 4{,}36}{0{,}00045 \cdot 23{,}8}$; 5) $\frac{16{,}7 \cdot 0{,}952}{0{,}0044 \cdot 8{,}62}$; 6) $\frac{108 \cdot 0{,}208}{3080}$; 7) $\frac{0{,}00427 \cdot 6{,}45}{0{,}0196 \cdot 23{,}8}$; 8) $\frac{54{,}2 \cdot 0{,}42}{0{,}0154}$; 9) $\frac{2{,}74 \cdot 0{,}00515 \cdot 1{,}09}{85{,}6 \cdot 3{,}36 \cdot 0{,}0226}$; 10) $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}27 \cdot 48{,}5}{0{,}07 \cdot 0{,}548}$.

5. 1) $13{,}5^2$; 2) $4{,}35^2$; 3) $0{,}222^2$; 4) $0{,}0308^2$; 5) 417^2; 6) 670^2; 7) $1{,}09^2$; 8) $0{,}0193^2$.

6. 1) $\sqrt{0{,}4}$; 2) $\sqrt{0{,}0777}$, 3) $\sqrt{4560}$; 4) $\sqrt{4{,}56}$; 5) $\sqrt{0{,}000248}$; 6) $\sqrt{0{,}00006}$.

7. 1) $\sqrt[3]{425}$; 2) $\sqrt[3]{4{,}25}$; 3) $\sqrt[3]{42{,}5}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}425}$; 5) $\sqrt[3]{0{,}00425}$.

8. 1) $\frac{\sqrt{18{,}9} \cdot 4{,}56}{0{,}00735 \cdot 8{,}07}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{0{,}0495} \cdot 6{,}08}{15{,}8 \cdot 0{,}00834}$; 3) $\frac{1920 \cdot 0{,}00509 \cdot \sqrt{6{,}24}}{4{,}07 \cdot 70}$; 4) $\frac{50{,}8 \cdot 0{,}0375 \sqrt[3]{4{,}95}}{1860 \cdot 0{,}00356 \cdot 4{,}03}$; 5) $\left(\frac{38{,}7 \cdot 1200 \sqrt[3]{0{,}07}}{51{,}8 \cdot 6{,}13 \cdot 9}\right)^2$.

9. 1) $0{,}275^{0{,}324}$; 2) $0{,}489^{0{,}285}$, 3) $0{,}62^{-0{,}01}$; 4) $0{,}157^{0{,}00486}$; 5) $0{,}215^{0{,}505}$; 6) $0{,}064^{0{,}0521}$.

10. 1) $24{,}8 \cdot 5^{0{,}28} \cdot 0{,}8^{0{,}67}$; 2) $30 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{0{,}125}$; 3) $5{,}48 \cdot 0{,}6^{0{,}8} \cdot 75^{0{,}8} \cdot 55^{0{,}4}$; 4) $\frac{126\,500 \cdot 400^{0{,}12}}{5^{0{,}28} \cdot 0{,}6^{0{,}6} \cdot 45^{0{,}65} \cdot 55^{1{,}5}}$.

11. 1) $(0{,}125)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(65)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0{,}55)^{\frac{3}{2}}$.

12. 1) $\sqrt[7{,}08]{0{,}427}$; 2) $24{,}8 \cdot 5^{0{,}22} \cdot 0{,}8^{0{,}67}$; 3) $\sqrt[3{,}25]{335}$; 4) $\left(\frac{1{,}85}{0{,}398}\right)^{0{,}25}$; 5) $\frac{0{,}289^{0{,}289} \cdot 0{,}625^{2{,}34}}{0{,}505^{2{,}48}}$.

13. Hallar x: 1) $\frac{23{,}5}{0{,}0246} = \frac{x}{0{,}00566}$; 2) $\frac{0{,}243}{x} = \frac{6{,}54}{0{,}0156}$.

CAPITULO XV

NUMEROS COMPLEJOS Y OPERACIONES CON ELLOS

§ 208. Números complejos

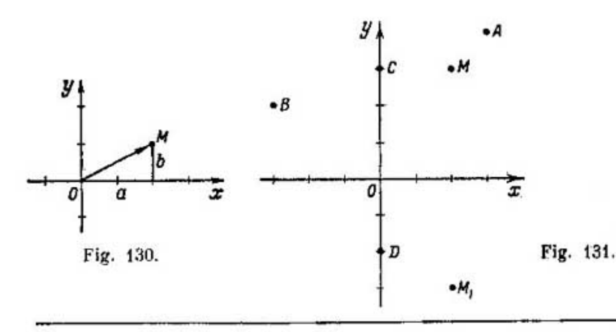
No todas las ecuaciones cuadráticas tienen raíces entre los números reales; por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$, o bien $x^2 = -1$, no tiene raíces, puesto que no existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -1.
El problema de resolver la ecuación cuadrática de tipo $x^2 + b^2 = 0$ $(b \neq 0)$ ha servido como uno de los motivos para la introducción de los nuevos *números* llamados *imaginarios*.
Introduciremos el nuevo número i, *la unidad imaginaria*, que posee la propiedad de que su cuadrado sea igual a -1:
$i^2 = -1$.

Vamos a admitir sin demostración que se pueden introducir los nuevos números, llamados *números complejos*, de manera que uniéndolos con los ya conocidos números reales, obtendremos un conjunto de números con los que se pueden realizar las operaciones aritméticas según las reglas ordinarias, y, además, entre los nuevos números se tendrá el número i, que posee la propiedad de ser
$i^2 = -1$.

● DEFINICION.. *Los números $a + bi$, donde a* y *b son dos números reales, se llaman complejos.* El número a se llama *parte real*; *bi, parte imaginaria* del número complejo. Por ejemplo:

$$3 + 2i\ (a = 3;\ b = 2);\quad \frac{1}{2} - i\sqrt{2}\ \left(a = \frac{1}{2};\ b = -\sqrt{2}\right).$$

Dos números complejos $a + bi$ y $a_1 + b_1 i$ se consideran *iguales* cuando y sólo cuando son iguales, por separado, sus partes reales e imaginarias, o sea, si
$a + bi = a_1 + b_1 i$, tendremos que $a = a_1$, $b = b_1$.
Si $a = 0$, $b \neq 0$, el número complejo $a + bi$ se convierte en un número imaginario puro bi; b se llama coeficiente de la unidad imaginaria.



Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ deviene un número real igual a a.
El conjunto de números complejos contiene, como parte (subconjunto), tanto todos los números reales como todos los números imaginarios puros; en otras palabras, los números reales, así como los números imaginarios son casos particulares de números complejos.
Por ejemplo:

$$5 = 5 + 0 \cdot i \qquad (a = 5;\ b = 0);$$
$$-3i = 0 + (-3)\, i \quad (a = 0;\ b = -3).$$

Observación 1. La raíz cuadrada de un número negativo se puede expresar mediante la unidad imaginaria i. Por ejemplo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i; \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{5}.$$

Observación 2. La introducción de los números complejos hace posible la resolución de ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo; por ejemplo, la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene dos raíces complejas: $x_{1,2} = 3 \pm 2i$.

§ 209. Representación geométrica de los números complejos

El número complejo $z = a + bi$ se admite representarlo por un punto M en el plano; la abscisa de este punto es igual a la parte real a, la ordenada es igual a b, es decir, al coeficiente de la unidad imaginaria (fig. 130). A todo número complejo corresponde un punto determinado del plano, y, viceversa, a cada punto del plano corresponde un número complejo determinado. De este modo, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano

de coordenadas xOy y el conjunto de números complejos. A los puntos del eje Ox corresponden números reales ($b = 0$); a los puntos del eje de ordenadas Oy corresponden los números imaginarios. Así, por ejemplo, el número complejo $3 + 4i$ se representa por el punto A (fig. 131), el número complejo $-3 + 2i$ se representa por el punto B, el número $3i$ se representa por el punto C y el número $-2i$ se representa por el punto D.

● DEFINICIÓN. Los dos números complejos $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ se llaman *conjugados*; se diferencian sólo por el signo ante la parte imaginaria.

Un par de números complejos conjugados se representa por los puntos M y M_1, simétricos respecto del eje de abscisas. En la fig. 131 los puntos M y M_1 representan los números complejos conjugados $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Al número complejo $a + bi$ se le puede dar también otra interpretación geométrica.

Unimos el origen de coordenadas O con el punto M (a; b) (fig. 130). En tal caso, el vector $\overrightarrow{OM}$ se puede admitir como figura geométrica del número complejo $z = a + bi$; además, la parte real a es la proyección del vector $\overrightarrow{OM}$ sobre el eje Ox, el coeficiente b antepuesto a la unidad imaginaria es la proyección del vector sobre el eje Oy:

$$a = \text{proy}_x\overrightarrow{OM}; \quad b = \text{proy}_y\overrightarrow{OM}.$$

Ambos métodos de representación geométrica de los números complejos son equivalentes, puesto que a todo punto M del plano xOy corresponde un vector determinado $\overrightarrow{OM}$, y, viceversa, a todo vector $\overrightarrow{OM}$, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas, corresponde un punto determinado M, extremo del vector.

● DEFINICIÓN. Se llama *módulo del número complejo* $z = a + bi$ el número real $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geométricamente el módulo o valor absoluto es la longitud del radio vector $\overrightarrow{OM}$. El número r es positivo y se anula sólo cuando $a = 0$, $b = 0$.

El módulo de un número complejo se designa con dos líneas verticales a cada lado del número, por ejemplo:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

$$|-2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

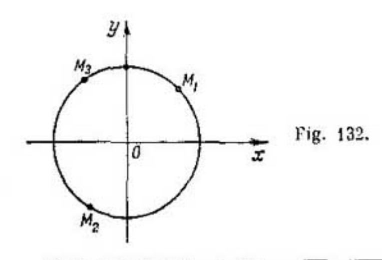


Fig. 132.

En el caso particular cuando $b = 0$, tendremos

$$| a + 0 \cdot i | = \sqrt{a^2 + 0^2} = | a |,$$

es decir, el módulo de un número real es el valor absoluto de ese número. Por eso, el módulo de un número complejo se llama también valor absoluto de ese número.

Todos los números complejos de módulo igual a la unidad se representan por los puntos de una circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas; por ejemplo, los números

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i; \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i; \quad -0{,}6 + 0{,}8i$$

se representan por los puntos M_1, M_2 y M_3 (fig. 132).

§ 210. Adición de números complejos

● DEFINICIÓN. Se llama *suma de dos números complejos* $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ el número complejo $z = a + bi$, cuyas partes real e imaginaria son iguales respectivamente a la suma de las partes reales e imaginarias de los números sumandos z_1 y z_2, es decir, $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$.

Ejemplos.
1) $(2 + 3i) + (3 - i) = (2 + 3) + (3 - 1) i = 5 + 2i$;
2) $(4 - 5i) + (2 + 5i) = 6$;
3) $(2m + ni) + (m - 2ni) = 3m - ni$.

De los ejemplos expuestos se aprecia que la adición de números complejos se realiza por las reglas ordinarias de adición de polinomios.

De la interpretación geométrica de los números complejos como vectores se deduce que la adición de los números

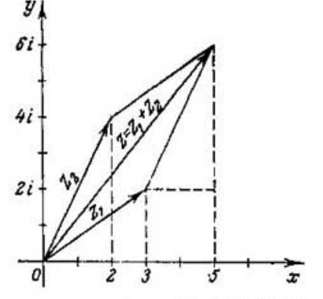


Fig. 133.

complejos se reduce a la adición de vectores según la regla dada en el § 88. En la fig. 133 se muestra la adición de los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 + 4i$.

§ 211. Sustracción de números complejos

● DEFINICIÓN. Por *sustracción* de un número complejo $z_1 = a_1 + b_1 i$ de otro número complejo $z_2 = a_2 + b_2 i$ se sobrentiende la determinación de un número $z = a + bi$ que sumado al sustraendo z_2 nos da el minuendo z_1.
En consecuencia,

$$z_1 - z_2 = z,$$

si $z + z_2 = z_1$, o bien

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a + bi$$

a condición de que

$$a + bi + a_2 + b_2 i = a_1 + b_1 i.$$

Sumando obtendremos:

$$(a + a_2) + (b + b_2)\, i = a_1 + b_1 i.$$

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos, obtendremos:

$a + a_2 = a_1$, de donde $a = a_1 - a_2$,
$b + b_2 = b_1$, de donde $b = b_1 - b_2$.

En la sustracción de dos números complejos se restan separadamente sus partes reales e imaginarias.

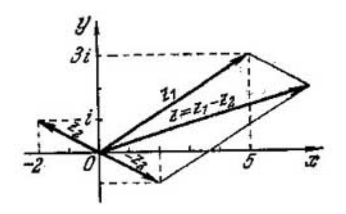


Fig. 134.

E j e m p l o.

$3-2i-(1+3i)=(3-1)+(-2-3)\,i=2-5i.$

Geométricamente la sustracción de números complejos significa la resta de sus correspondientes vectores. En la fig. 134 se muestra la sustracción de $z_1=5+3i$ del número $z_2=-2+i$.

§ 212. Producto de números complejos

Dos números complejos $a+bi$ y a_1+b_1i se multiplican según la regla ordinaria del producto de polinomios; en el resultado i^2 se sustituye por -1 y se separa la parte real de la imaginaria:

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$$
$$\underbrace{aa_1-bb_1}_{\text{parte real}}+\underbrace{(a_1b+ab_1)\,i}_{\text{parte imaginaria}}.$$

Tengamos en cuenta que el *producto de dos números complejos también es un número complejo.*

Esta regla de la multiplicación se extiende también a un número mayor de factores complejos

E j e m p l o s. 1) $(2-3i)(3+5i)=6-9i+10i-$
$-15i^2=6+i-15\cdot(-1)=21+i$;
2) $(4+i)\cdot 2i=8i+2i^2=-2+8i$.

El producto de números complejos puede resultar un número real. En particular, esto ocurrirá al multiplicar dos números complejos conjugados:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2=$$
$$=r^2,$$

donde r es el módulo de cada uno de los factores.

Así pues, el producto de dos números complejos conjugados es un número real, igual al cuadrado de su módulo común.
Veamos un nuevo ejemplo, que demuestra que debido a las operaciones con los números complejos pueden obtenerse interesantes correlaciones en el campo de los números reales.
Tenemos dos productos:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)\, i$$

y

$$(a - bi)(c - di) = ac - bd - (bc + ad)\, i.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bc)^2 + (bc + ad)^2.$$

La última igualdad contiene exclusivamente números reales y expresa la siguiente correlación de la teoría de los números: al multiplicar dos números, cada uno de los cuales es la suma de dos cuadrados, se obtiene un producto que es también la suma de dos cuadrados

E j e m p l o s. 1) $(1 + 4)(9 + 25) = 5 \cdot 34 = 170 = 1^2 + 13^2$;

2) $(25 + 4)(1 + 9) = 29 \cdot 10 = 290 = 1^2 + 17^2$.

§ 213. División de números complejos

Se llama *cociente de la división de dos números complejos* $a + bi$ y $a_1 + b_1 i$ el número complejo $x + yi$ que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.
De este modo, si los coeficientes a_1 y b_1 son simultáneamente distintos de cero, suponiendo que $\frac{a+bi}{a_1+b_1 i} = x + yi$, tendremos:

$$a + bi = (a_1 + b_1 i)(x + yi),$$

o bien

$$a + bi = a_1 x - b_1 y + (b_1 x + a_1 y)\, i.$$

De la condición de igualdad de dos números complejos se deduce que

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a; \\ b_1 x + a_1 y = b. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos que:

$$x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i.$$

Este resultado se puede obtener más simplemente multiplicando el dividendo y el divisor por un número conjugado al divisor:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)\,i}{a_1^2+b_1^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i.$$

En adelante nos guiaremos con esta regla de la división.

E j e m p l o s.

1) $\frac{2+3i}{2+i}=\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-3i^2+6i-2i}{2^2+1}=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}\,i;$

2) $\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12-12-16i-9i}{16+9}=\frac{-25i}{25}=-i.$

§ 214. Potencia de la unidad imaginaria

Utilizando la igualdad $i^2=-1$, se puede determinar fácilmente una potencia entera positiva cualquiera de la unidad imaginaria. Así, tendremos:

$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\ i^4=i^2\cdot i^2=1;$

$i^5=i^4\cdot i=i;\ i^6=i^4\cdot i^2=-1;\ i^7=-i;\ i^8=1$, etc.

Esto demuestra que los valores de la potencia i^n, donde n es un número entero positivo, se repiten periódicamente al aumentar el exponente en 4. Por eso, para elevar el número i a una potencia entera positiva, hay que dividir el exponente por 4 y elevar i a la potencia cuyo índice es igual al resto de la división.

E j e m p l o s.

$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i;$

$i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1,\ i^{51}=i^{48}\cdot i^3=-i.$

En general

$i^{4n+1}=i;\ i^{4n+2}=i^2=-1,\ i^{4n+3}=i^3=-i,\ i^{4n}=1.$

§ 215. Potenciación de un número complejo

La elevación de un número complejo a una potencia entera positiva se realiza por la regla de potenciación de un binomio, puesto que es un caso particular del producto de factores complejos iguales.

E j e m p l o s. $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$; $(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\,i$.

§ 216. Extracción de la raíz cuadrada de un número complejo

Supongamos que se quiera extraer la raíz cuadrada del número $a + bi$. Quiere decir que debemos hallar un número complejo $x + yi$ tal que su cuadrado sea igual a $a + bi$. Tendremos que:

$$\sqrt{a + bi} = x + yi,$$

donde x e y son números reales. En tal caso,

$$a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos, obtendremos:

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Resolvemos este sistema con respecto a las incógnitas x e y. De la segunda ecuación hallamos que $y = \frac{b}{2x}$. En tal caso,

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a,$$

de donde

$$4x^4 - b^2 - 4ax^2 = 0,$$

o bien

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0;$$

por lo tanto,

$$x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4}; \quad x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Puesto que $\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant a$, ante el radical hay que tomar el signo más para que x^2 sea un número positivo o cero; por lo tanto,

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \qquad (1)$$

Sustituimos este valor de x^2 en la ecuación $x^2 - y^2 = a$ y obtendremos:

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{2}$$

Los valores de x e y los hallamos de las igualdades (1) y (2):

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \tag{3}$$

y

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \tag{4}$$

La ecuación $2xy = b$ demuestra que el producto xy tiene el mismo signo que el número b. Por lo tanto, si $b > 0$, x e y tienen signos iguales; si $b < 0$, x e y tienen diferentes signos. Por eso, para $b > 0$ tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

para $b < 0$, tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

En la práctica estas fórmulas no se utilizan, sino se realiza el paso dado de los cálculos de x e y en cada caso separado.

E j e m p l o 1.

$$\sqrt{1 + 2i} = x + yi;$$

$$1 + 2i = x^2 - y^2 + 2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{x}; \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 1; \quad x^4 - x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - y^2 = 1;$$

$$y^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Finalmente

$$\sqrt{1 + 2i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right).$$

Ejemplo 2.

$$\sqrt{i}=x+yi,$$
$$i=x^2-y^2+2xiy;$$
$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1; \end{cases}$$
$$y=\frac{1}{2x};\ x^2-\frac{1}{4x^2}=0;\ 4x^4-1=0;\ x^4=\frac{1}{4};\ x^2=\frac{1}{2};$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Verificación.

$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

En el § 222 se demostrará un método más conveniente de radicación de un número complejo.

§ 217. Forma trigonométrica de un número complejo

Como ya se expresó en el § 209, el número complejo $a+bi$, distinto de cero, se representa por el radio vector $\vec{OM}$ además la longitud de este vector es el módulo del número complejo (fig. 135):

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

El ángulo φ entre el sentido positivo del eje Ox y el vector $\vec{OM}$ se llama *argumento del número complejo* $a+bi$. Este ángulo se cuenta desde el eje Ox al vector $\vec{OM}$, lo que está indicado en el dibujo por una flecha. Si el número complejo es igual a cero, el vector $\vec{OM}$ se convierte en un punto (vector nulo) y no hay necesidad de hablar de su sentido. Por eso, se considera que el nulo no tiene argumento.

Es evidente que cada número complejo, distinto de cero, tiene un conjunto infinito de valores del argumento; estos valores se diferencian entre sí en un número entero de vueltas completas, es decir, en la magnitud $2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera; por ejemplo, los argumentos del número complejo $2+2i$ son los ángulos de tipo $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$.

El valor del argumento, tomado en los límites de la primera circunferencia, es decir, de 0 a 2π se llama *principal*.

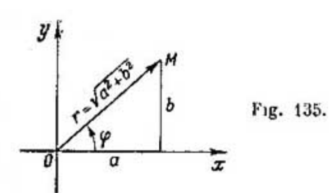


Fig. 135.

Así, por ejemplo, para el número complejo $2+2i$ el valor principal del argumento es igual a $\frac{\pi}{4}$, para el número $-2+2i$ el valor principal del argumento es igual a $\frac{3}{4}\pi$. Para los números $3, -3, i, -i$ los valores principales son respectivamente $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

Por la fig. 135 tendremos:

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\operatorname{sen}\varphi,$$

de donde

$$a+bi = r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi = r\ (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

La expresión $r\ (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ se llama *forma trigonométrica* del número complejo, a diferencia de la forma $a+bi$ que se llama *algebraica.*

Para determinar el argumento φ utilizamos las fórmulas

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ y } \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{r}\ (r = \sqrt{a^2+b^2}).$$

En función del signo de las partes real e imaginaria se toma el correspondiente cuadrante, en el que debe terminar el ángulo φ.

E j e m p l o 1. Representar en forma trigonométrica el número $-1+i\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2;\ \cos\varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ y } \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\right).$$

Puesto que $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, φ debe tomarse igual a $\frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ejemplo 2. Representar en forma trigonométrica el número $-1-i$.

Tenemos que:

$$r=\sqrt{2};\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{sen}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

De este modo, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$.

Ejemplo 3. Representar en forma trigonométrica el número 1.

Tenemos que $r=1$, $\varphi=0$; por lo tanto, $1=1(\cos 0+$ $+i\operatorname{sen}0)$, o bien $1=\cos 2\pi k+i\operatorname{sen}2\pi k$.

§ 218. Producto de números complejos dados en forma trigonométrica

Multipliquemos los dos números complejos:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\operatorname{sen}\varphi_1)$$

y

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\operatorname{sen}\varphi_2).$$

Obtendremos:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+ir_1r_2\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+ir_1r_2\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2-r_1r_2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2.$$

En forma reducida:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)].$$

El resultado nos muestra que *el módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores, y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

§ 219. Interpretación geométrica del producto de números complejos

En la fig. 136 el vector $\overrightarrow{OM_1}$ corresponde al número complejo $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\operatorname{sen}\varphi_1)$, y el vector $\overrightarrow{OM_2}$, al número $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\operatorname{sen}\varphi_2)$.

El vector $\overrightarrow{OM}$ corresponde al producto $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+$ $+\varphi_2)+i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)]$.

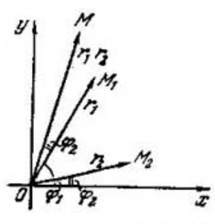


Fig. 136.

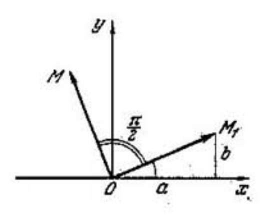


Fig. 137.

El vector $\overrightarrow{OM}$ se obtiene del vector $\overrightarrow{OM_1}$ girando el ángulo φ_2 y variando su longitud (r_1) r_2 veces. Si $r_2 > 1$, se dice que el vector $\overrightarrow{OM_1}$ *se dilata*, y si $r_2 < 1$, *se contrae*. En el caso particular, cuando el número complejo z_1 se multiplica por i, el vector $\overrightarrow{OM_1}$ gira un ángulo recto $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, conservando, en este caso, la longitud r_1 sin variación (fig. 137).

E j e m p l o.

$2(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,5(\cos 2\varphi + i\operatorname{sen}2\varphi) = 10(\cos 3\varphi + i\operatorname{sen}3\varphi)$.

La regla obtenida sirve para un número cualquiera de factores.

§ 220. División de números complejos dados en forma trigonométrica

Hallamos el módulo y el argumento del cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)}.$$

Multiplicamos el numerador y el denominador del segundo miembro por $(\cos\varphi_2 - i\operatorname{sen}\varphi_2)$; obtendremos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\operatorname{sen}\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \operatorname{sen}^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Por lo tanto, *el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y divisor, y el argumento del cociente, es igual a la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor.*

Utilizando esta regla se puede demostrar que

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi} =$$

$$= \cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi).$$

En forma reducida:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi.$$

§ 221. Potenciación de un número complejo dado en forma trigonométrica

Puesto que la n-ésima potencia, donde n es un número entero positivo, es el producto de n factores iguales, por la regla de la multiplicación de números complejos obtenemos

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi),$$

o bien

$$r^n(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Después de la reducción, tendremos que:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \quad (1)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Moivre*. En particular, nos permite obtener el coseno y el seno de los arcos, múltiplos del dado.
Supongamos que $n = 2$, en tal caso $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$,
o bien,

$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$, de donde

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.$$

Cuando $n = 3$, tendremos que:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi,$$

o bien

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + i(3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi) = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi,$$

de donde

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi,$$

o bien

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi,$$

o también

$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi.$$

Si ambos miembros de la última igualdad del párrafo anterior los elevamos a la potencia n, obtenemos:

$$[(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^{-1}]^n = [\cos(-\varphi) + i\operatorname{sen}(-\varphi)]^n,$$

o bien

$$(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\operatorname{sen}(-n\varphi).$$

La última igualdad muestra que la fórmula (1) se cumple también para los exponentes enteros negativos.

§ 222. Radicación de números complejos dados en forma trigonométrica

Supongamos que se quiere extraer la raíz n-ésima del número complejo $Z = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$.
Esto significa que se debe hallar un número complejo $z = \rho(\cos\theta + i\cos\theta)$, que elevado a la n-ésima potencia nos dé el número Z, es decir,

$$[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$

o bien

$$\rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos deducimos que sus módulos deben ser iguales, y los argumentos se pueden diferenciar en un número múltiplo de 2π, es decir, $r = \rho^n$; $n\theta = \varphi + 2\pi k$, donde k es un número entero, de donde obtenemos:

$$\rho = \sqrt[n]{r};\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

De este modo, el resultado de la radicación se presenta de la siguiente forma:

$$z = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1)$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz.

Si en la fórmula (1) damos al número k los valores 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, obtendremos los siguientes n valores de la raíz:

$$\text{si } k=0, \; z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\text{si } k=1, \; z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$\text{si } k=2, \; z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right];$$

. . . .

$$\text{si } k=n-1, \; z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Los argumentos de estos valores de la raíz, es decir, los ángulos

$$\frac{\varphi}{n}; \; \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}; \; \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}; \; \ldots; \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

van en orden creciente; se comprueba fácilmente que cada uno de ellos es menor que un ángulo completo, o bien 2π. Para ello es suficiente demostrar que el mayor de ellos

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

En realidad, el valor principal del argumento de un número complejo es menor que un ángulo completo: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, y por eso,

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(-n)\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}=2\pi;$$

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

De la trigonometría se sabe que en los límites de una circunferencia dos ángulos distintos no pueden tener simultáneamente valores iguales del seno y valores idénticos del coseno; *por lo tanto, todos, los n valores de la raíz serán distintos.*

Con el aumento ulterior del número k ($k=n$, $n+1$, $n+2$, ...), ya no se obtienen nuevos valores de la raíz;

por ejemplo, para $k = n$ tendremos:

$$z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right] =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right) = z_0.$$

Se ha obtenido el mismo valor que para $k = 0$. Si $k = n+1$, obtenemos z_1, para $k = n+2$, obtenemos z_2, etc.

E j e m p l o 1. $\sqrt{i}$. Representemos i en forma trigonométrica:

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ (r es igual a 1);

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right).$$

Para $k = 0$, obtendremos:

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Para $k = 1$, obtendremos:

$$\sqrt{i} = \cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Este ejemplo se resolvió de otro modo en el § 216.

E j e m p l o 2. $z = \sqrt[4]{-1}$. Tenemos que:

$-1 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi$.

Luego

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi+2\pi k}{4};$$

para $k = 0$, obtendremos:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k = 1$, obtendremos:

$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

para $k=2$, obtendremos:

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k=3$, obtendremos:

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

E j e m p l o 3. Hallar cuatro valores de $x=\sqrt[4]{1}$.

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt{1(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)}=$$

$$=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{0+2\pi k}{4}\right)=$$

$$=\cos\frac{k\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{2}=x_k.$$

Si $k=0$; 1; 2; 3, obtendremos:

$$x_1=\cos 0+i\,\text{sen}\,0=1;$$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}=i;$$

$$x_3=\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi=-1;$$

$$x_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Vamos a dar una interpretación geométrica a los resultados obtenidos. Construimos los puntos correspondientes a los cuatro valores hallados.

Estos serán los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, que representan los vértices del cuadrado inscripto en la circunferencia dada (fig. 138).

De un modo semejante, extrayendo la raíz cúbica de 1, hallamos tres números complejos:

$$\cos 0+i\,\text{sen}\,0,\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\quad \text{y}\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}.$$

Si construimos sus puntos correspondientes, éstos estarán sobre una circunferencia de radio unitario y serán los vértices de un triángulo equilátero inscripto (fig. 139).

Geométricamente la extracción de la raíz n-ésima de 1 se reduce a la construcción de un polígono regular de n vértices inscripto en el círculo de radio unitario; además, si n es impar, uno de los vértices se encontrará sobre el eje de abscisas a la derecha de 0; si n es par, se tendrán dos vértices sobre el eje de abscisas.

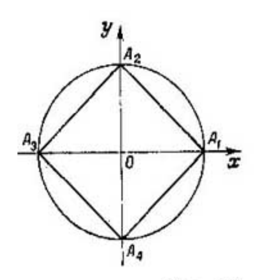


Fig. 138.

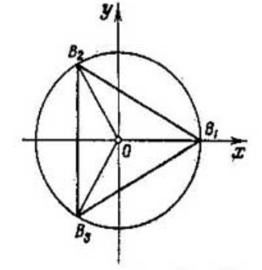


Fig. 139.

§ 223. Forma exponencial de un número complejo

En las diferentes partes de la moderna matemática, así como en sus aplicaciones (electrotecnia, radiotécnica, hidráulica, etc.) se utiliza la *forma exponencial* del número complejo, basada en la fórmula de Euler, que relaciona las funciones trigonométricas del argumento real con la función exponencial del argumento imaginario.

Exponemos la *primera fórmula de Euler* sin deducción:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi, \tag{1}$$

donde el número e, tomado como base de los logaritmos naturales (véase los §§ 175 y 240), es irracional ($e \approx 2{,}718$; este número es tan importante en la matemática como el número π).

Si en la fórmula $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ sustituimos la expresión $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ por $e^{\varphi i}$, obtendremos $z = re^{\varphi i}$. Precisamente ésta es la forma exponencial del número complejo z.

En esta notación r es el módulo del número complejo, φ es el argumento del número complejo z.

Sustituyendo en la fórmula de Euler (1) φ por $(-\varphi)$, obtendremos la *segunda fórmula de Euler*

$$e^{-\varphi i} = \cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi),$$

o bien

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi. \tag{2}$$

E j e m p l o 1. Representar en forma exponencial el número complejo $z = 3 + 4i$.

El módulo $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Hallamos el argumento φ. Puesto que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$, tendremos que $\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{4}{3}\approx 0{,}93$, $3+4i=5e^{0{,}93i}$.

Ejemplo 2. $z=\sqrt{3}-i$.
Hallamos el módulo: $|z|=\sqrt{3+1}=2$. El argumento φ (valor principal) lo hallamos de la correlación $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por lo tanto, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$; $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Ejemplo 3. $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Ejemplo 4. $-1=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi=e^{\pi i}$

Ejemplo 5. Calcular e^{2+i}.
Tenemos que $e^{2+i}=e^2\cdot e^i=e^2(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)=$ $=e^2(0{,}540+i\cdot 0{,}842)=7{,}39(0{,}540+i\cdot 0{,}842)\approx 3{,}99+$ $+6{,}22i$.
De la fórmula de Euler

$$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$
$$e^{-\varphi i}=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi \tag{2}$$

se pueden obtener importantes resultados.
Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), obtenemos

$e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}=2\cos\varphi$, de donde

$$\cos\varphi=\frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2}. \tag{3}$$

Restando miembro a miembro de la igualdad (1) la (2), tendremos

$e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}=2i\operatorname{sen}\varphi$, de donde

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}. \tag{4}$$

Las igualdades (3) y (4) se llaman también *fórmulas de Euler*; ellas expresan las funciones trigonométricas del argumento real φ por las funciones exponenciales del argumento imaginario. Las fórmulas (3) y (4) se cumplen también

cuando φ se sustituye por un número complejo z cualquiera; esta sustitución nos da:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}; \tag{6}$$

las igualdades (5) y (6) se toman como definición del seno y del coseno de argumento complejo.

E j e m p l o. Calcular $\cos i$.

Poniendo en la igualdad (5) $z = i$, obtendremos:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}.$$

Resultó que $\cos i$ es un número real, mayor que 1, lo que no nos debe extrañar.

Calculemos $\operatorname{sen} i$:

$$\operatorname{sen} i = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \frac{i\,(e^{-1} - e^{1})}{-2}.$$

En consecuencia, $\operatorname{sen} i$ es un número imaginario.

Demostremos que las funciones trigonométricas de argumento complejo también son periódicas, de período $T = 2\pi$. En efecto,

$$\cos (z + 2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} + e^{-(z+2\pi)i}}{2} =$$

$$= \frac{e^{zi} \cdot e^{2\pi i} + e^{-zi} \cdot e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

puesto que por las fórmulas de Euler

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1,$$

$$e^{-2\pi i} = \cos 2\pi - i \operatorname{sen} 2\pi = 1.$$

La periodicidad de la función exponencial de argumento complejo se revela fácilmente; su período es $T = 2\pi i$. En efecto,

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z} \cdot 1 = e^{z}.$$

Se observa que todas las fórmulas de la trigonometría ordinaria son válidas en el campo complejo. Por ejemplo,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1,$$

Esto se verifica fácilmente

$$\left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2=$$
$$=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}}{4}+\frac{e^{2zi}-2+e^{-2zi}}{-4}=$$
$$=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}-e^{2zi}+2-e^{-2zi}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Exactamente del mismo modo se puede verificar que sen $2z = 2$ sen $z \cdot \cos z$, $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 -$ sen $z_1 \times$ $\times$ sen z_2, y una serie de otras fórmulas conocidas para las funciones trigonométricas de argumento real.

§ 224. Distintos problemas de números complejos

Ejemplo 1. Hallar dos números reales x e y que satisfagan la igualdad

$$\frac{2i}{x}+iy-2=3i-\frac{3}{x}+y.$$

Dicha igualdad la escribimos en la forma

$$-2+\left(\frac{2}{x}+y\right)i=\left(y-\frac{3}{x}\right)+3i.$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos, tendremos el sistema

$$\begin{cases} y-\dfrac{3}{x}=-2, \\ \dfrac{2}{x}+y=3, \end{cases}$$

de donde hallamos:

$x=1$, $y=1$.

Ejemplo 2. Hallar el número complejo z, igual al cuadrado del número complejo conjugado a él, es decir,

$$z = z^{-2}. \qquad (1)$$

Supongamos que $z = x + yi$, en tal caso $\bar{z} = x - yi$. La igualdad (1) toma la forma

$$x + yi = (x - yi)^2,$$
$$x + yi = x^2 - y^2 - 2xyi,$$

de donde

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = -2xy, \end{cases}$$

donde nuevamente hemos utilizado las condiciones de igualdad de dos números complejos.

Si el sistema toma la forma

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ y(1+2x) = 0, \end{cases}$$

su resolución se reduce a la resolución de los siguientes dos sistemas más elementales:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = x. \\ 1 + 2x = 0. \end{cases}$$

Resolviendo cada uno de ellos, obtendremos:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}, \\ y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2}, \\ y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

De este modo, los cuatro valores satisfacen la condición establecida:

$$z_1 = 0 + 0 \cdot i = 0,$$
$$z_2 = 1 + 0 \cdot i = 1,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$
$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

E j e m p l o 3. Interpretar geométricamente el producto $(2 + 2i)\, i$. Al número complejo $z_1 = 2 + 2i$ corresponde el vector $r_1 = \{2, 2\}$; además, el vector r_1 forma con el eje Ox el ángulo

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{2} = 1 \right).$$

El número complejo i se representa por el vector unitario $\boldsymbol{r}_2 = \{0, 1\}$, dirigido bajo el ángulo $\frac{\pi}{2}$ al eje Ox. De acuerdo a la explicación dada en el § 219, el producto de $(2+2i)$ por i significa el giro del vector $\boldsymbol{r}_1$ el ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sen-

tido contrario al movimiento de las agujas del reloj, conservándose la longitud del vector.
Por lo tanto, al producto dado corresponde el vector r_3, que forma con el eje un ángulo igual a $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$.
La longitud del vector r_3 es igual a la longitud del vector r_1, es decir, $|r|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.
Verificación: $(2+2i)\,i=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Ejemplo 4. ¿Cuál es el sentido geométrico de la desigualdad $|z|<1$?
El módulo del número complejo z, es decir, $|z|$, significa la distancia del origen de coordenadas al punto z; ya que esta distancia es menor que 1, describimos del origen de coordenadas una circunferencia de radio $r=1$.
Todos los puntos interiores del círculo representan los números complejos z, para los cuales $|z|<1$. Para los puntos de la circunferencia, tendremos que $|z|=1$. Los puntos externos son números complejos que satisfacen la desigualdad $|z|>1$.

Ejemplo 5. ¿Cómo están dispuestos los puntos complejos que satisfacen la desigualdad $|z-2|<3$?
El módulo de la diferencia de los números z y 2, o sea, $|z-2|$, denota la distancia del punto $z_1=2$ al punto z, que debe ser menor que 3. Por eso, desde el punto 2 trazamos una circunferencia de radio igual a 3 unidades; los puntos complejos interiores de esta circunferencia son soluciones de la desigualdad $|z-2|<3$.

▲ **Ejercicios**

1. Escribir en forma reducida las siguientes expresiones:
a) $i+i+i+i$; b) $5i-9i+12i$; c) $ai+bi$;
d) $10i-10i$; e) $ai+bi-ai$; f) $ai-ai$.

Calcular:

2. a) $(3+5i)+(2+i)$; b) $(7-5i)+(7+5i)$; c) $(2+5i)+(-2+3i)$.
3. a) $(1+4i)+(-1-4i)$; b) $(-6+3i)+(6+3i)$; c) $(5+3i)+(12+i)$.
4. a) $(-7+2i)+(7+2i)$; b) $(m+ni)+(x+yi)$; c) $i+(a+bi)$.
5. a) $(3+5i)-(2+i)$; b) $(7-5i)-(7+5i)$; c) $(2+5i)-(-2+3i)$.
6. a) $1+4i-(-1-4i)$; b) $-6+3i-(6+3i)$; c) $(5+3i)-(5-3i)$.

7. a) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$; b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$; c) $(a+bi)-i$.

8. a) $5(2-3i)$; b) $-3(1+i)$; c) $i(4+5i)$.

9. a) $-2(3-i)$; b) $i(1-i)$; c) $-0{,}5i(1+2i)$.

10. a) $(3+2i)(4-i)$; b) $(1-i)(2+i)$; c) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}6i)$.

11. a) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$; b) $(a+mi)(2a-mi)$; c) $(x-i\sqrt{y})\times\times(-x-2i\sqrt{y})$.

12. a) $(3+5i)(4-i)$; b) $(6+11i)(7+3i)$; c) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$.

13. a) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; b) $(p-2qi)(2p+qi)$; c) $(a-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$.

14. a) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; b) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$ c) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Descomponer en pares de factores complejos

15. a) x^2+y^2; b) a^2+9b^2; c) $4m^2+9n^2$.

16. a) $a^2+\frac{b^2}{4}$; b) p^2+1; c) $16+9$.

17. a) $25+1$; b) 5; c) 65.

Calcular los cocientes:

18. a) $\frac{10i}{2}$; b) $\frac{15i}{5i}$; c) $8i:(-16i)$.

19. a) $\frac{21-i}{i}$; b) $\frac{1+i}{i}$; c) $-\frac{12}{5i}$.

20. a) $\frac{5}{1+2i}$; b) $\frac{1+i}{1-i}$; c) $-\frac{17-6i}{3-4i}$.

21. a) $\frac{63+16i}{4+3i}$; b) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; c) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

22. a) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; c) $\frac{m+ni}{m-ni}$.

23. a) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$; b) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

c) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

24. a) $\frac{32}{1+3i\sqrt{7}}$; b) $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

25. a) $\frac{3}{\sqrt{2}-i}$; b) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; c) $\frac{10i}{3+i}$.

Elevar a potencia:

26. a) i^{24}; b) i^{37}; c) i^{49}; d) $(-i)^{10}$; e) $(-i)^{9}$; f) $-i^{10}$.

27. a) i^{21}; b) i^{11}; c) i^{25}; d) i^{44}; e) i^{58}; f) i^{136}.

28. a) $(2-i\sqrt{2})^2$; b) $(x+yi)^2+(x-yi)^2$; c) $(1+i)^3$.

29. a) $(-0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;

c) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

30. a) $(4+3i)^2$; b) $(2-i\sqrt{3})^2$; c) $(1-i)^3$.

Extraer la raíz:

31. a) $\sqrt{ai}$; b) $\sqrt{5+12i}$.

32. a) $\sqrt{21+20i}$; b) $\sqrt{-13+84i}$.

33. a) $\sqrt{15+8i}$; b) $\sqrt{-77+36i}$.

34. a) $\sqrt{3{,}75+2i}$; b) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

35. Construir los puntos que representan los números: a) $3+5i$; b) $4-i$; c) $-3+2i$; d) $-2-2i$; e) 5; f) $-4i$; g) $5i$; h) $0{,}2-0{,}5i$; i) $-5i-5$.

36. ¿Cómo se dispone en el plano la representación de dos números complejos conjugados?

Hallar el módulo y el argumento de los números:

37. a) $1+i$; b) $1-i$; c) $-1+i$; d) $-1-i$.

38. a) $\sqrt{3}+i$; b) $5+2i$; c) $-2i$; d) $3-3i$.

Representar en forma trigonométrica los números:

39. a) i; b) $-i$; c) -3; d) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

40. a) $3+2i$; b) $3+4i$.

41. a) $3-4i$; b) $8+5i$.

42. a) $2+3i$; b) $-12+5i$.

43. a) $-2-7i$; b) $4-3i$.

Construir los sumandos y la suma de los números complejos:

44. a) $3+4i$ y $5+3i$; b) $1-5i$ y $2+3i$; c) $-4+2i$ y $4+2i$.

45. a) $5+3i$ y $3+5i$; b) $1-3i$ y $1+3i$; c) $-5+2i$ y $5+2i$

Formar el minuendo, el sustraendo y la diferencia de los números complejos:

46. a) $3+4i$ y $2+i$; b) $7-2i$ y $5-3i$; c) $4+5i$ y $5+4i$.

47. a) $3+6i$ y $6+3i$; b) $6+3i$ y $3+6i$; c) $1-i$ y $3i$.

Calcular los productos:

48. $2(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen} 30^\circ)\cdot 3(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen} 30^\circ)$.

49. $2(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen} 30^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen} 45^\circ)$.

50. $2(\cos 60^\circ+i\operatorname{sen} 60^\circ)\cdot(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen} 45^\circ)$.

51. $(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen} 30^\circ)\cdot(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen} 15^\circ)$.

52. $(\cos 40^\circ+i\operatorname{sen} 40^\circ)\cdot(\cos 50^\circ+i\operatorname{sen} 50^\circ)$.

Demostrar que

53. $(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)^2 = \cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$.

54. $(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)^3 = i$ ó sea $\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°$.

55. $(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)^{\frac{1}{2}} = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$.

Calcular

56. a) $(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)^3$; b) $(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)^5$.

57. a) $(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)^4$; b) $(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)^4$.

58. $\sqrt{i}$. 59. $\sqrt{-i}$. 60. $\sqrt{1+i}$. 61. $\sqrt{1-i}$. 62. $\sqrt[3]{i}$. 63. $\sqrt[5]{1}$.

64. $\sqrt[6]{1}$. 65. $\sqrt[4]{-1}$.

66. Representar en forma de vectores los siguientes números: 1,5; -2; i; $-3i$; $2+i$; $-2+i$; $2-i$; $-2-i$.

67. Interpretar geométricamente cada una de las siguientes operaciones con números complejos:
1) $(2+3i)+(-1+i)$; 2) $(-4+2i)-(2-3i)$;
3) $2i\cdot 3$; 4) $(1+2i)\,i$;
5) $(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}i)$; 6) $(1-\sqrt{3}i)^2$.

68. Hallar los números reales x e y de las ecuaciones:
1) $3+2xi+3yi = 8i+x-2y$; 2) $(1-i)\,x+(2+i)\,y = 4+2i$;
3) $\frac{8i}{x}+iy-2 = 7i-\frac{10}{x}+y$.

69. Hallar las raíces complejas de las siguientes ecuaciones cuadráticas:
1) $x^2-6x+13=0$, 2) $2x^2+5x+6=0$; 3) $x^2-2(1+i)\,x+(2i-1)=0$.

70. Cómo están distribuidos en el plano los puntos complejos z, para los cuales:

1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; 3) $\varphi=1{,}2$; 4) $|z|>1$; 5) $|z|<5$;

6) $2<|z|<4$; 7) $|z+1|<3$; 8) $|z-i|>2$.

71. Representar en forma exponencial los siguientes números complejos:
1) $2+3i$; 2) $1-i$; 3) $2i$; 4) $-\sqrt{3}+i$; 5) -2; 6) i.

72. Transformar en la forma algebraica:

1) $2\cdot e^{\frac{\pi}{8}i}$; 2) e^{2+i}; 3) $2\cdot e^{1-\frac{\pi}{4}i}$.

73. Utilizando la igualdad $a^x = e^{x\ln a}$, $a>0$ y $a\neq 1$ (verificar por logaritmación), representar en forma exponencial los siguientes números:

1) 2^{3i}; 2) $3^{-\frac{1}{2}}$; 3) 5^{1+i}; 4) 10^{1-i}.

74. Calcular los valores de las funciones trigonométricas de argumento complejo:

1) $\cos(2-i)$; 2) $\operatorname{sen}(1+0{,}5i)$; 3) $\cos\left(\frac{1}{2}+3i\right)$; 4) $\operatorname{sen}(-3i)$.

75. Demostrar la validez de las igualdades
1) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$;

2) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$;
3) $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$;
4) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$.

76. Demostrar que las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, para a, b y c reales y discriminante negativo, son un par de números complejos conjugados.

77. ¿Cuál debe ser la dependencia entre x e y para que el producto $(x + yi)\cdot(2 + 3i)$ sea un número real?

78. Demostrar que si z y $\bar{z}$ es un par de números complejos conjugados, entonces z^3 y $\bar{z}^3$ son también mutuamente conjugados.

79. ¿Cómo están distribuidos en el plano xOy los puntos complejos z, que satisfacen la desigualdad:

$$\log_{\frac{1}{2}} |z| + \log_{\frac{1}{2}} (|z| + 1) < \log_{\frac{1}{2}} (2|z| + 5)?$$

80. Resolver la desigualdad:

$$-2 < 2\log_{\frac{1}{3}} |x + 1 - i\sqrt{5}| < -\log_3 2 - 1.$$

CAPITULO XVI

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS LIMITES

§ 225. Ejemplos de repetición del concepto de función y propiedades generales de las funciones

En el capítulo VI fueron dados los conocimientos fundamentales sobre funciones. Sin llegar a repetir las definiciones y formulaciones dadas antes, veamos una serie de ejemplos concretos, que en conjunto abarcan todos los momentos importantes del estudio de las funciones dentro de los límites previstos por el programa.

Ejemplo 1. Dada la funcion $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}+1$, calcular: $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Demostrar que el número $x=-1$ es una raíz de la función $f(x)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}=\frac{1}{-\frac{3}{4}+3}=\frac{4}{9};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{x}}+1=\frac{2}{x^3}-x+1.$$

Puesto que $f(-1)=2\cdot(-1)^3-\frac{1}{-1}+1=0$, tendremos que el número -1 realmente es una raíz de la función $f(x)$.

Ejemplo 2. La magnitud de la presión atmosférica p (kgf/cm²) varía según la ley $p=e^{-0,12h}$ en función de la altura h (km) sobre el nivel del mar. Hallar la presión a la altura $h=10$ km.

Utilizando la tabla dada al final del libro hallamos $e^{-0,12\cdot 10}=e^{-1,2}\approx 0,3012\approx 0,3$.

De este modo, la presión atmosférica a la altura $h=10$ km es, aproximadamente, igual a 0,3 kgf/cm².

E j e m p l o 3. Expresar la superficie de un triángulo rectángulo de hipotenusa constante, igual a c, como función del ángulo agudo α. ¿Para qué magnitud de α la superficie alcanza el valor máximo?

Si designamos los catetos por a y b, $S=\frac{ab}{2}$, pero $a = c\operatorname{sen}\alpha$, $b=c\cos\alpha$, luego

$$S=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{c^2}{4}\operatorname{sen}2\alpha.$$

Así, pues, la función buscada es $S=\frac{c^2}{4}\operatorname{sen}2\alpha$. La superficie será máxima si $\operatorname{sen}2\alpha=1$, es decir, cuando $\alpha=45°$. En consecuencia, si la hipotenusa es constante la superficie mayor corresponde al triángulo rectángulo isósceles; esta superficie mayor es igual a $\frac{c^2}{4}$.

E j e m p l o 4. Hallar el campo de definición de cada uno de las siguientes funciones:

1) $y=\sqrt{2-\lg(4-x)}$;

2) $y=\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}$;

3) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

1) La función $\sqrt{2-\lg(4-x)}$ está definida para todo x que satisfaga el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2-\lg(4-x)\geqslant 0; \\ 4-x>0. \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \lg(4-x)\leqslant 2, \\ x<4. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema hallamos $-96\leqslant x<4$. El campo de definición es el semisegmento $[-96, 4)$.

2) la función $\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}$ está definida para todo x que satisfaga la desigualdad $\left|\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right|\leqslant 1$, lo que es equivalente a la doble desigualdad $-1\leqslant\frac{x-3}{\sqrt{2}}\leqslant 1$, o bien $-\sqrt{2}\leqslant \leqslant x-3\leqslant\sqrt{2}$. Sumando 3 a todos los miembros de la

desigualdades obtendremos $3-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{2}$. La región de definición de la función dada es el segmento $[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}]$. 3) La función $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$ está definida para todos los valores del argumento, para los cuales $\cos x \neq 0$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$; por lo tanto, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ y $x \neq \pi k$. En consecuencia, la región de definición es todo el eje numérico, con exclusión de los puntos $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, y los puntos $x=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Se puede decir de otro modo, que la región de definición está compuesta de un conjunto infinito de intervalos:

$$\ldots, \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots$$

Ejemplo 5. Demostrar que: 1) la función $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ es par; 2) la función $\varphi(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ es impar.

1) $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$.

La igualdad obtenida $f(-x)=f(x)$ demuestra que la función es par (véase la definición de la función par).

2) $\varphi(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\varphi(x)$.

De la igualdad $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ se deduce que la función $\varphi(x)$ es impar (por definición de la función impar).

Ejemplo 6. Demostar que: 1) la función $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ tiene el valor mínimo igual a 1, para $x=0$; 2) la función $\varphi(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ es monótona creciente en todo el eje numérico.

1) Representar $f(x)$ en la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{2}+2\right]$$

(¡ verifíquese !). La expresión $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{2} \geqslant 0$ (el cuadrado de un número real es un número no negativo), y por eso, la suma entre corchetes no es menor que 2. Esta suma toma el valor de 2, si el primer sumando $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{2}=0$, lo que ocurre cuando $x=0$. Luego,

$$f(0)=f_{\text{menor}}=\frac{1}{2}[0+2]=1.$$

2) Para demostrar que la función $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ es monótona creciente en todo el eje numérico es suficiente comprobar que para los dos valores cualesquiera del argumento x_1 y x_2, donde $x_2>x_1$, se cumple la desigualdad $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$ (es decir, a un gran valor del argumento corresponde un gran valor de la función), lo que es equivalente a la desigualdad $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$. Vamos a demostrar la validez de esta desigualdad. Tenemos que:

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}[e^{x_2}-e^{-x_2}-e^{x_1}+e^{-x_1}]=\frac{1}{2}\left[(e^{x_2}-e^{x_1})+(e^{-x_1}-e^{-x_2})\right].$$

La primera diferencia entre paréntesis es positiva, puesto que de $x_2>x_1$ se deduce que $e^{x_2}>e^{x_1}$ (véase el § 159). El segundo sumando entre corchetes, es decir, $e^{-x_1}-e^{-x_2}$, también es positivo, puesto que $e^{-x_1}-e^{-x_2}=\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}>0$ (de dos fracciones positivas con igual numerador es mayor aquella cuyo denominador es menor). De lo dicho se deduce que la expresión entre corchetes, es un número positivo para todo $x_2>x_1$.
De este modo, $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$, o bien $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$, lo que se quería demostrar.

Ejemplo 7. Demostrar que la gráfica de la función par es simétrica respecto del eje de ordenadas, y la gráfica de la función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.
Supongamos que $f(-x)=f(x)$, luego, a dos valores contrarios cualesquiera del argumento x y $-x$ corresponde un mismo valor de la funcion y, es decir, los puntos $M(x;\ y)$ y $M_1(-x;\ y)$ son simétricos respecto del eje de ordenadas, y dado que el conjunto de todos los puntos de este tipo forma la gráfica de la función, de aquí se deduce, precisamente, su simetría respecto del eje Oy.
En el caso de la función impar tendremos la igualdad $f(-x)=-f(x)$ o que es equivalente a ésta la igualdad $-f(-x)=f(x)$. A todo punto $M(x;\ y)$ de la gráfica le corresponde el punto $M_1(-x;\ -y)$ de la misma gráfica. Estos dos puntos son simétricos respecto del origen de coordenadas O, puesto que el segmento MM_1 pasa por el origen de coordenadas O y aquí se divide por la mitad (trácese el dibujo y demuéstrese geométricamente).

E j e m p l o 8. Dada la función $y(t) = 2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3)$, hallar: 1) el período de esta función; 2) su menor raíz positiva.

1) Supongamos que el período es igual a T. En ese caso, de acuerdo a la definición del período (véase el § 112) para todo número t debe tenerse la igualdad

$$y(t + T) = y(t) \qquad (1)$$

o bien $2 \operatorname{sen}[10\pi(t + T) - 0{,}3] = 2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3)$, lo que es equivalente a que la diferencia se anula:

$$\operatorname{sen}[\underbrace{10\pi(t+T)-0{,}3}_{x}] - \operatorname{sen}(\underbrace{10\pi t-0{,}3}_{y}) = 0.$$

El primer miembro de la igualdad se puede transformar en un producto según la fórmula $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \times$ $\times \cos\frac{x+y}{2}$. Luego, obtendremos:

$$2 \operatorname{sen} 5\pi T \cos[10\pi t - 0{,}3 + 5\pi T] = 0.$$

El segundo factor $\cos[10\pi t - 0{,}3 + 5\pi T]$ no puede ser idénticamente (para todos los valores de t) igual a cero.

Por lo tanto, $\operatorname{sen} 5\pi T = 0$, $5\pi T = \pi k$, $5T = k$. Pero, dado que el período es el menor número que satisface la correlación (1), entonces $k = 1$, de donde $T = \frac{1}{5}$.

2) Para hallar la raíz de la función $y(t)$ resolvemos la ecuación

$$2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3) = 0,$$

de donde $10\pi t - 0{,}3 = 0$; $t = \frac{0{,}3}{10\pi} = \frac{0{,}03}{\pi} \approx 0{,}0095$.

Como suplemento a lo dicho en el § 48 sobre los métodos de planteo de las funciones, conviene agregar que además de los métodos tabular, analítico y gráfico, existen también otros procedimientos de planteo. Así, por ejemplo, la función se la puede dar por una regla verbal cualquiera, por la que a cada número x se le puede poner en correspondencia otro número y.

Por ejemplo, definimos la función $E(x)$ por la siguiente regla: el valor de la función es igual al mayor número entero contenido en el argumento x y que no lo supera. Basándonos en esta regla tendremos: $E(3,2) = 3$; $E(-1{,}5) = -2$; $E(5) = 5$; $E(0{,}8) = 0$, etc. $E(x)$ toma

(de acuerdo a la difinición) sólo valores enteros. A esta función se le ha dado la denominación especial «entero de x». En la literatura matemática se tropieza con otra notación de esta función, por ejemplo $[x]$. Constrúyase individualmente la gráfica de la función $E(x)$.
Para adquirir experiencia en la resolución de ejemplos, semejantes a los expuestos en este párrafo, al final del capítulo se da una cantidad suficiente de ejercicios; el manejo libre de este material ayuda a dominar mejor los elementos de la teoría de los límites, que es el contenido fundamental de este capítulo.

§ 226. Algunos métodos de construcción de las gráficas de las funciones

Al construir la gráfica del trinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$, así como de la función $y = A \cdot \text{sen}(kx + a)$ hemos utilizado los mismos métodos. Formulemos la comunidad de estos procedimientos lo que permite utilizarlos también en otros casos, es decir, al construir las gráficas de las funciones que aún desconocemos.
1) Si conocemos la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = f(x) + c$ se obtiene de la gráfica de la función inicial desplazada $|c|$ unidades hacia arriba en dirección al eje de ordenadas Oy, si $c > 0$, y hacia abajo, si $c < 0$ (fig. 140).
2) Si $y = mf(x)$, la gráfica de esta función se puede obtener de la inicial alargando todas las ordenadas m veces, si $m > 1$ (fig. 141), y comprimiéndolas $\frac{1}{m}$ veces, si $0 < m < 1$ (fig. 142). Cuando $m < 0$, para $|m| > 1$ (respectivamente $|m| < 1$), al principio se alargan las ordenadas $|m|$ veces (respectivamente se comprimen $\frac{1}{|m|}$ veces), y a continuación la gráfica se representa de modo especular respecto del eje Ox.
3) $y = f(x - a)$. Esta gráfica se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ desplazándola a $|a|$ unidades de la escala hacia la derecha en dirección al eje Ox, si $a > 0$, y hacia la izquierda si $a < 0$ (fig. 143).
4) La gráfica de la función $y = f(kx)$, $k > 0$, se puede obtener si todas las abscisas de la gráfica de $y = f(x)$ se reduce k veces, manteniendo las ordenadas constantes. Cuando $k < 1$, las abscisas de hecho aumentarán $\frac{1}{k}$ veces. Puede servir de ejemplo la gráfica de $y = \text{sen}\, 2x$ obtenida de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ (§ 138).
5) La gráfica de la función $y = |f(x)|$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$, si los arcos de curva, que se encuentran bajo el eje de abscisas, se representan especularmente respecto del eje Ox (fig. 144).
E j e m p l o. Construir la gráfica de la función $y = \frac{2x+1}{x-1}$.
Dicha función está definida en todo el eje numérico, salvo el punto $x = 1$ Transformemos la expresión fraccionaria $\frac{2x+1}{x-1}$, para ello

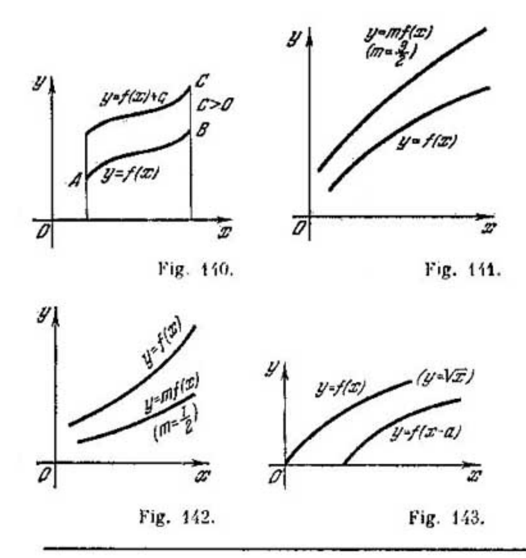


Fig. 140. Fig. 141.

Fig. 142. Fig. 143.

---

dividimos el numerador por el denominador. Obtendremos $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ (¡verifíquese!)

Ahora se puede suponer que para construir la gráfica de la función dada hay que tomar como base la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, es decir, la hipérbola.

Realizamos con la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ las siguientes operaciones:

1) Desplazamos una unidad de la escala en el sentido positivo del eje Ox; a la nueva situación de la hipérbola respecto de los ejes de ordenadas le corresponde la ecuación $y = \frac{1}{x-1}$.

2) Alargamos todas sus ordenadas tres veces, en tal caso la nueva ecuación toma la forma $y = \frac{3}{x-1}$.

3) Desplazamos dos unidades de la escala en el sentido positivo del eje Oy (fig. 145), lo que nos conduce a la gráfica de la función $y = 2 + \frac{3}{x-1}$, o bien $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

El ejemplo examinado es un caso particular de la función de tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ para $x \neq -\frac{d}{c}$.

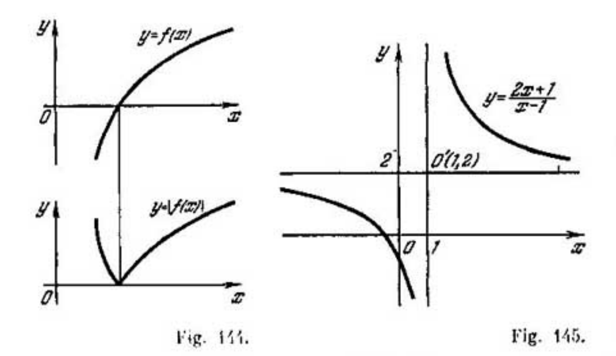


Fig. 144.   Fig. 145.

Esta función se llama fraccionaria lineal, puesto que es la relación de dos funciones lineales. En forma general se puede demostrar (de modo análogo como se efectuó en el ejemplo examinado antes) que la gráfica de la función fraccionaria lineal es una hipérbola.

§ 227. Funciones elementales

Como se sabe el título de este libro es «Algebra y funciones elementales», por lo que los lectores se preguntarán, naturalmente, ¿qué significa función elemental? Es que, hasta ahora, sobre la misma no se ha dicho ni una palabra. En realidad este concepto no se podía definir, mientras no se estudiasen las funciones fundamentales.

Se consideran *funciones elementales fundamentales*:

1) $y = C$, donde C es un número real
2) la función potencial $y = x^{\alpha}$, α es un número real;
3) la función exponencial $y = a^{x}$ $(a > 0$ y $a \neq 1)$;
4) la función logarítmica $y = \log_a x$ $(a > 0$ y $a \neq 1)$;
5) las funciones trigonométricas: sen x, cos x, tg x, ctg x;
6) las funciones trigonométricas inversas: arc sen x, arc cos x, arc tg x, arc ctg x.

En este libro se ha dedicado considerable lugar al estudio de las funciones antes enumeradas. Las funciones obtenidas de las funciones elementales fundamentales mediante las cuatro operaciones aritméticas y la operación de tomar la función de la función, se llaman *elementales*. En particular, entre ellas se encuentran:

1) la función lineal $y = ax + b$;
2) la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$;

3) las funciones: a) $\sqrt{2} \cdot 2^x \cos x$, b) $\frac{x^2}{\text{arc sen } x}$ y otras.

Las funciones elementales se utilizan ampliamente en la ciencia y en la técnica.

§ 228. Propiedades de las magnitudes absolutas

En los capítulos anteriores ya hemos operado con la magnitud absoluta de los números reales. Recordemos que se llama magnitud absoluta de un número real a el propio número a, si éste no es negativo, y el número inverso $(-a)$, si el número a es negativo:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|-5| = 5$; $|12| = 12$.

P r o p i e d a d 1. *La magnitud absoluta de una suma no es mayor que la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos:*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Se tendrá el signo igual sólo cuando ambos sumandos son de signo igual.

E j e m p l o s. 1) $|(-2) + (-8)| = |-2| + |-8|$, $10 = 10$;
2) $|15 + (-3)| < |15| + |-3|$, $12 < 18$. Esta propiedad se extienda a un número finito cualquiera de sumandos.

P r o p i e d a d 2. *La magnitud absoluta de la resta de dos números reales no es menor que la diferencia de las magnitudes absolutas de estos números:*

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

E j e m p l o s. 1) $|15 - 9| = |15| - |9|$, $6 = 6$;
2) $|3 - (-1)| > |3| - |-1|$, $4 > 2$.

§ 229. Límite de una sucesión

En el § 141 se dieron los conocimientos iniciales de las sucesiones. Antes de estudiar este párrafo recomendamos leer todo lo dicho antes sobre las sucesiones. Veamos al principio algunos ejemplos de determinación del *límite* de una sucesión.

E j e m p l o 1. Supongamos que el término común de una sucesión es $x_n = \frac{n}{n+1}$; para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100, \ldots 1000, \ldots$

Los primeros términos de la sucesión serán:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{1000}{1001}, \ldots$$

Notamos que con el crecimiento del número de término de la sucesión la magnitud del término común se aproxima más y más al número 1. Así, por ejemplo, el 100-ésimo término $x_{100} = \frac{100}{101}$ se diferencia de 1 en $\frac{1}{101}$; el 1000-ésimo término $x_{1000} = \frac{1000}{1001}$ se diferencia de 1 en $\frac{1}{1001}$, etc. Se puede prever que el cienmilésimo término se diferenciará de 1 en $\frac{1}{100\,001} < 10^{-5}$.

En este ejemplo vemos que la diferencia entre el número 1 y el término común de la sucesión, en magnitud absoluta, se hace y queda tan pequeña como se quiera en el crecimiento ilimitado del número de término; en tal caso se dice, que *la sucesión tiende al límite, igual a 1.*

E j e m p l o 2. $x_n = 2 + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Escribamos los primeros términos de la sucesión, dando n los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . :

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = 2\frac{1}{4}; \quad x_3 = 1\frac{7}{8}; \quad x_4 = 2\frac{1}{16}; \quad x_5 = 1\frac{31}{32};$$

$$x_6 = 2\frac{1}{64}; \ \ldots$$

Se aprecia fácilmente que la magnitud de los términos de la sucesión oscila alrededor del número 2, desviándose de él, a ambos lados, cada vez menos a medida que crecen los números de términos de la sucesión. Comprobamos que esta desviación se hace tan pequeña como se quiera para números suficientemente grandes de términos de la sucesión. Queremos, por ejemplo, conocer el término de la sucesión, comenzando del cual la desviación del número 2 se hace menor que 10^{-5}, es decir, $|x_n - 2| < 10^{-5}$:

$$\left|2 + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right| < 10^{-5},$$

o bien

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}, \ 2^{-n} < 10^{-5}.$$

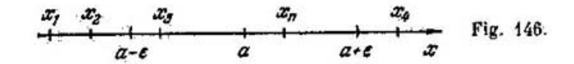


Fig. 146.

Resolvamos esta desigualdad exponencial respecto de n: $-n \lg 2 < -5$, $n \lg 2 > 5$,

$$n > \frac{5}{\lg 2} = \frac{5}{0,3010} \approx 16,6.$$

Por consiguiente, comenzando del número $n = 17$, todos los términos siguientes se diferenciarán del número 2 en menos de 10^{-5}. Es evidente que si fijamos una desviación aún menor, por ejemplo, la desviación $\varepsilon = 10^{-20}$, razonando como antes, tendremos que $n > 66,4$, es decir, 67-ésimo término ya satisface la condición establecida.

● DEFINICIÓN. El número a se llama *límite de la sucesión* $\{x_n\}$, si para un número positivo cualquiera tan pequeño como se quiera ε se puede fijar un número N del término de la sucesión tal que, comenzando de él, el valor absoluto de la diferencia $|x_n - a|$ se hace y se conserva menor que el numero ε con el crecimiento ulterior de n, o sea, si

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ para } n \geqslant N.$$

Si a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, se escribirá:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ o bien } x_n \to a \text{ para } n \to \infty.$$

§ 230. Ilustración geométrica de la aproximación de una sucesión al límite

Convengamos en llamar *ε-entorno* (se lee «epsilon entorno») *del número a* al conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $|x - a| < \varepsilon$, es decir, la doble desigualdad

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$.
Por ejemplo, si $a = 3$, $\varepsilon = 0,1$, ε-entorno del número 3 es el intervalo (2,9; 3,1).
Geométricamente el ε-entorno del número a (o como se dice también, del punto a) representa el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (fig. 146).
Ahora se puede obtener fácilmente la ilustración geométrica del hecho de que el número a es el límite de una sucesión

numérica. En efecto, si los términos de la sucesión se representan por puntos del eje numérico, cualquier ε-entorno del número a que tomemos, comenzando de un número determinado, todos los términos de la sucesión caen en este ε-entorno y no salen de él, continuando acumularse alrededor del punto a, que representa el límite de la sucesión numérica.

§ 231. Límite de una función

Estudiemos la variación de la función $f(x) = 0,5x^2 + 3$, cuando el argumento x se aproxima ilimitadamente al valor de $x = 2$, sin hacerse igual a 2 ($x \neq 2$), lo que se admite en designar por: $x \to 2$ («x tiende a 2»).

Se puede tender a 2 por distintos métodos. Por ejemplo, el argumento x puede tomar los valores

1,5; 1,9; 1,99; 1,999; . . .

o los valores

2,2; 2,01; 2,001; . . .

La tabla expuesta a continuación nos muestra que los valores de la función antes dada tienden al número 5.

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,2
y	4,125	4,805	4,980	4,998	5	5,002	5,02	5,42

Vamos a demostrar que los valores de la función se diferenciarán muy poco del número 5, solo si x es suficientemente próximo a 2 ($x \neq 2$).

Fijemos un número positivo pequeño ε, por ejemplo, $\varepsilon = 0,001$ y nos preguntamos: ¿cuán pequeño debe ser δ-entorno del punto 2, para que a cualquier valor de x de este entorno $(2 - \delta,\ 2 + \delta)$ se cumpla la desigualdad

$|f(x) - 5| < 0,001$?

Escribimos esta desigualdad para nuestra función:

$$|0,5x^2 + 3 - 5| < 0,001,$$
$$0,5\,|x^2 - 4| < 0,001,$$
$$|x^2 - 4| < 0,002,$$

de donde

$$-0,002 < x^2 - 4 < 0,002,$$
$$3,998 < x^2 < 4 < 4,002$$

(después de sumar 4 a todos los términos de la desigualdad), o bien

$$1{,}999 < x < 2{,}001,$$

o sea

$$2 - 0{,}001 < x < 2 + 0{,}001.$$

Por lo tanto, es suficiente poner $\delta = 0{,}001$.
De este modo, hemos hallado un entorno pequeño del punto $x = 2$ tal que a cualquier valor del argumento x de este entorno corresponden valores de la función que se diferencian del número 5 menos de 0,001.

● DEFINICION. El número A se llama *límite de la función* $f(x)$ para $x \to a$, si a cualquier número positivo $\varepsilon > 0$ se puede fijar un δ-entorno (delta entorno) tal del punto a, que sólo cuando $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, tendremos que

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Esto se escribe así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ o bien } f(x) \to A \ (x \to a).$$

§ 232. Función infinitamente pequeña

En matemática tienen gran importancia las funciones, cuyo límite es igual a cero.

● DEFINICION. La función $f(x)$ se llama *función infinitamente pequeña* (o *magnitud infinitamente pequeña*) para $x \to a$, si $\lim f(x) = 0$ para $x \to a$.

Ejemplo. Demostremos que la función $f(x) = x^2 - 4$ para $x \to 2$ es una función infinitamente pequeña. De acuerdo a la definición de límite, es suficiente comprobar que los valores de la función, en magnitud absoluta, se pueden hacer, tan pequeños como se quiera, menores que un número positivo cualquiera ε, si sólo los valores del argumento x son suficientemente próximos al número 2 (es decir, se toman del correspondiente δ-entorno del número 2).
Supongamos que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon,$$

de donde

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon.$$

Sumando 4 a todos los miembros de la desigualdad, obtendremos:

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon.$$

Después de extraer la raíz cuadrada de todos los miembros de la desigualdad, tendremos

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon};$$

para $\varepsilon = 0{,}01$

$$\sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01}; \ 1{,}997 < x < 2{,}002,$$

es decir, $\delta = 0{,}002$.

§ 233. Función infinitamente grande

E j e m p l o 1. Demostrar que la función de argumento natural $f(n) = 2^n$ es capaz de hacerse y mantenerse mayor que un número positivo M cualquiera, tan grande como se quiera. Los valores de la función dada, dispuestos en orden creciente del argumento n, forman una sucesión numérica que es una progresión geométrica.

n	1	2	3	4	5	...
$f(n)$	2	4	8	16	32	...

Fijemos un número positivo grande cualquiera, por ejemplo $M = 10^8$ (cien millones). Hallemos el número del término de la sucesión, desde el cual se cumplirá constantemente la desigualdad

$$2^n > 10^8.$$

Resolvemos esta desigualdad, considerando como incógnita n. Tomamos logaritmo de base 10:

$$n \lg 2 > 8,$$

de donde

$$n > \frac{8}{\lg 2} \approx 26{,}6.$$

Por consiguiente, el 27-ésimo término de la progresión y todos los términos siguientes superan en magnitud el número 10^8.

Es evidente que si se fija como límite otro número, por ejemplo $M = 10^{30}$, de cualquier modo se hallará un término de la sucesión desde el cual $2^n > 10^{30}$; precisamente, el 100-ésimo término y los términos que le siguen satisfacen esta desigualdad.

E j e m p l o 2. Estudiar la variación de la función

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{para} \quad x \to 2.$$

Por ejemplo, vamos a dar al argumento x los valores sucesivos: 2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; . . . (cabe señalar que cada término de esta sucesión es mayor que 2; en tal caso se dice que x tiende a 2 desde la derecha), luego los correspondientes valores de la función $f(x)$ serán: 10, 100, 1000, . . . Si, ahora, $x = 1{,}9$; 1,99; 1,999; . . . (es decir, x tiende a 2 desde la izquierda), los correspondientes valores de las funciones serán: -10, -100, -1000, . . . Esto indica que los valores absolutos de la función crecen ilimitadamente. En efecto, si queremos que el valor absoluto de la función satisfaga la desigualdad

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| > 10^5,$$

entonces, resolviendo esta desigualdad, hallamos:

$$|x-2| < 10^{-5},$$

es decir, los valores de x se deben tomar del intervalo $1{,}99999 < x < 2{,}00001$.

● DEFINICIÓN. La función $f(x)$ se llama *función infinitamente grande* (o *magnitud infinitamente grande*) para $x \to a$, si sus valores, tomados en magnitud absoluta, superan un número positivo M cualquiera, antes dado, sólo cuando los valores del argumento x caen en un entorno suficientemente pequeño del punto a; en este caso se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

En pocas palabras, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, si para cualquier $M > 0$ se halla $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > M$ para $a - \delta < x < a + \delta$.

Por consiguiente: 1) el término común de la sucesión $f(n) = 2^n$ es una magnitud infinitamente grande, cuando el

número del término crece ilimitadamente, lo que se escribe del siguiente modo:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty;$$

2) la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ es infinitamente grande cuando $x\to 2\,(x\neq 2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

Cuando es importante indicar también el signo de una función infinitamente grande, ante el símbolo ∞ se escribe respectivamente el signo más o menos. Por ejemplo, para la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Aquí la notación $x\to 2+0$ sustituye la frase «x tiende a 2 por la derecha», es decir, manteniéndose mayor que 2; $x\to 2-0$ significa la aproximación al número 2 por la izquierda.

Cabe señalar que no se puede decir anticipadamente que la función es infinitamente pequeño o infinitamente grande si no se indica para qué variación del argumento x se examina esta función. Por ejemplo, la función $f(x)=(x-1)^2$ es infinitamente pequeña, si $x\to 1$, pero esta función es infinitamente grande, si x crece ilimitadamente:

1) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0,$

2) $\lim_{x\to\infty}(x-1)^2=\infty.$

§ 234. Relación entre las magnitudes infinitamente pequeña e infinitamente grande

Con el ejemplo de la función $y=\frac{1}{x}$ vamos a explicar la relación existente entre las magnitudes infinitamente pequeña e infinitamente grande. Si $x\to 0$ (x es infinitamente pequeña), la magnitud inversa $\frac{1}{x}$ es una función infinitamente grande, o una magnitud infinitamente grande.

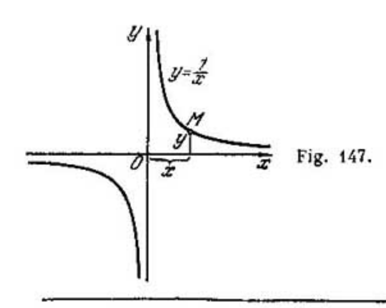


Fig. 147.

Evidentemente esto lo ilustra la rama derecha de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ (fig. 147); al moverse el punto M por la curva de derecha a izquierda la abscisa $x \to 0$ (x es infinitamente pequeña), su magnitud inversa $\frac{1}{x} = y$, es decir, la ordenada de la curva, en este caso, crece ilimitadamente: $\frac{1}{x} \to \infty$, y viceversa, al moverse el punto M por la curva de izquierda a derecha la abscisa $x \to \infty$ y la ordenada $y = \frac{1}{x} \to 0$. De este modo, la magnitud, inversa a la infinitamente pequeña, es la infinitamente grande y viceversa.

Veamos otro ejemplo: la $\operatorname{tg} x$ para $x \to \frac{\pi}{2}$ es una magnitud infinitamente grande; su magnitud inversa, es decir, la $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tiende a cero cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

§ 235. Propiedades de las funciones infinitamente pequeñas

Para simplificar la escritura introducimos notaciones abreviadas: las funciones infinitamente pequeñas $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ en adelante las vamos a designar por α, β, γ, recordando que estas tres funciones dependen del argumento x, y que se hacen infinitamente pequeñas sólo cuando el argumento x tiende a un número determinado $a (x \to a)$.

P r o p i e d a d 1. *La suma algebraica de un número finito de funciones infinitamente pequeñas es una función infinitamente pequeña.* Si

$\alpha \to 0, \ \beta \to 0, \ \gamma \to 0,$

tendremos, por ejemplo, que

$$(\alpha - \beta + \gamma) \to 0,$$

o bien, en otra notación

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0 \\ \gamma \to 0}} (\alpha - \beta + \gamma) = 0.$$

En efecto, para que la suma algebraica $(\alpha - \beta + \gamma)$ se haga, en valor absoluto, menor que un número positivo cualquiera ε dado con anterioridad, tan pequeño como se quiera, sólo se requiere que

$$\left. \begin{aligned} |\alpha| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ |-\beta| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ |\gamma| &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

lo que es completamente posible, de lo contrario α, β, y γ no serían infinitamente pequeños. Sumando las desigualdades (1), obtendremos:

$$|\alpha| + |-\beta| + |\gamma| < \varepsilon,$$

y por eso, sin lugar a dudas (véase el § 228)

$$|\alpha - \beta + \gamma| < \varepsilon \ *).$$

Las demás propiedades no las demostraremos, sino explicaremos sólo sus sentidos con ejemplos.

P r o p i e d a d 2. *El producto de una función infinitamente pequeña por una limitada es una función infinitamente pequeña.*

La funcion $f(x)$ se llama *limitada* en un cierto entorno del punto $x = a$, si existe un número positivo M tal que para todos los puntos x de ese entorno, los valores absolutos de la funcion $f(x)$ son menores que el número M:

$$|f(x)| < M.$$

En forma reducida la propiedad 2 se escribe así: si $a \to 0$ y $|f(x)| < M$, entonces $a \cdot f(x) \to 0$.

---

*) Se tiene en cuenta que las desigualdades (1) se cumplen respectivamente en ciertos δ_1-, δ_2- y δ_3-entornos del punto a. La desigualdad resultante se cumple, por lo tanto, en el menor de estos tres entornos

E j e m p l o s. 1) Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ están limitadas en el entorno de un punto cualquiera de su región de definición (todo el eje numérico), puesto que

$$|\operatorname{sen} x| < 1{,}1; \quad |\cos x| < 1{,}1.$$

Aquí se ha tomado por M el número 1,1, pero en general se puede tomar cualquier otro número mayor que 1.
De acuerdo a la propiedad 2 podemos afirmar que el producto $(x-3)\operatorname{sen} x \to 0$, si $x \to 3$, dado que $(x-3) \to 0$, para $x \to 3$, y $\operatorname{sen} x$ es una función limitada.

2) La función $\frac{1}{x-2}$ no está limitada en el entorno del punto $x = 2$, pero en un entorno suficientemente pequeño de otro punto cualquiera, por ejemplo, del punto $x = 5$, ella está limitada, puesto que $\left|\frac{1}{x-2}\right| < \frac{1}{2}$ para todos los valores de x del intervalo $(4{,}5;\ 5{,}5)$.

Corolario. Toda magnitud constante es limitada de por sí, y por eso, el producto de una constante por una infinitamente pequeña es una magnitud infinitamente pequeña. Basándonos en esto podemos escribir, que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 100\pi \cos x = 0,$$

puesto que $\cos x \to 0$ para $x \to \frac{\pi}{2}$, es decir, $\cos x$ es una magnitud infinitamente pequeña en el entorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$; 100π es constante, y por eso, el producto $100\pi \cos x$ es una magnitud infinitamente pequeña.

§ 236. Teoremas sobre límite

Las demostraciones de los teoremas sobre límites están basadas en el siguiente postulado: toda variable, que tiende a un límite, puede ser representada en forma de suma de su límite y de una cierta magnitud infinitamente pequeña. Esto deriva de la misma definición de límite: si $z \to A$, es decir, el número A es el límite de z, entonces en el proceso de aproximación ilimitada la diferencia $z - A$ se hace tan pequeña como se quiera, en valor absoluto, es decir, esta diferencia es infinitamente pequeña:

$$z - A = \alpha \text{ o bien } z = A + \alpha.$$

Inversamente: si la magnitud variable z está representada en forma de una suma de «constante + infinitamente pequeña», la constante A es el límite de la variable z.

Teorema 1. *El límite de la suma algebraica de dos o varias variables es igual a la suma algebraica de los límites de los sumandos.*

Aquí y en adelante, se tendrá en cuenta que tales límites (sumandos, factores, etc.) existen.

■ DEMOSTRACIÓN. Dado
$z \to A,\ y \to B,\ u \to C,$

demostraremos, por ejemplo, que
$(z + y - u) \to A + B - C.$

Si α, β, γ son infinitamente pequeños, y z, y, u son funciones del argumento x, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} z &= A + \alpha, \\ y &= B + \beta, \\ u &= C + \gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$z + y - u = A + B - C + (\alpha + \beta - \gamma). \qquad (2)$$

La igualdad (2) se ha obtenido de las igualdades (1) sumando las dos primeras y restando la tercera.
El primer miembro de la igualdad (2) es una magnitud variable, el segundo miembro es la suma de la constante $(A + B - C)$ y del infinitamente pequeño $(\alpha + \beta - \gamma)$, y por eso, esta constante es el límite de la magnitud variable:

$(z + y - u) \to A + B - C,$

o en otra notación

$\lim (z + y - u) = \lim z + \lim y - \lim u = A + B - C.$

Los restantes teoremas sobre límites sólo los formularemos dejando su demostración a los lectores.

Teorema 2. *El límite del producto de dos o varias variables es igual al producto de los límites de cada factor:*

$\lim (zyu) = \lim z \cdot \lim y \cdot \lim u = A \cdot B \cdot C,$

o bien

$zyu \to ABC.$

C o r o l a r i o. Si una de las magnitudes variables es constante, tendremos que

$$\lim (My) = M \lim y = MB,$$

puesto que el límite de una constante es igual a la propia constante. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de límite.*

E j e m p l o. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 3)(3x + 2) =$

$$= \lim_{x\to 1} (x^2 + 3) \lim_{x\to 1} (3x + 2) = (\lim_{x\to 1} x^2 + 3)(3 \lim_{x\to 1} x + 2) =$$

$$= (1 + 3)(3 \cdot 1 + 2) = 20.$$

T e o r e m a 3. *El límite del cociente de dos variables es igual al cociente de los límites del dividendo y del divisor, si el límite del divisor no es igual a cero.*

Si

$$z \to A,\ y \to B\ (B \neq 0),$$

se tendrá

$$\frac{z}{y} \to \frac{A}{B},$$

o en otra notación

$$\lim \frac{z}{y} = \frac{\lim z}{\lim y} = \frac{A}{B}.$$

E j e m p l o.

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} (2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2} (x^3-1)} = \frac{11}{7}.$$

T e o r e m a 4. *El límite de la potencia de una variable es igual a la misma potencia del límite de la base:*

$$\lim (z^n) = (\lim z)^n$$

E j e m p l o s. 1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} x)^3 = 2^3 = 8;$

$$2)\ \lim_{x\to 6} \sqrt{2x-3} = \lim_{x\to 6} (2x-3)^{\frac{1}{2}} = [\lim_{x\to 6} (2x-3)]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (2 \cdot 6 - 3)^{\frac{1}{2}} = 3.$$

T e o r e m a 5. *Si la variable z está entre otras dos variables y y u, que tienden a un límite común, entonces z tiende al mismo límite.*

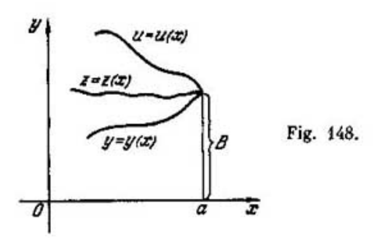


Fig. 148.

Si $y < z < u$ e $y \to B$, $u \to B$, tendremos que $z \to B$. El sentido de este teorema se puede interpretar claramente: en la fig. 148 se muestran gráficamente tres funciones de argumento x. La gráfica de la función $z = z(x)$ se encuentra entre las gráficas $y = y(x)$ y $u = u(x)$; si $x \to a$, las ordenadas de y y u tienden al límite B; luego, está claro que la ordenada de la curva media $z = z(x)$ tiende al mismo límite B.

§ 237. Criterio de existencia del límite de una sucesión

En muchos casos al buscar el límite de una sucesión es importante saber que este límite existe independientemente de que estemos en condición de hallarlo o no.

Para formular el criterio de existencia del límite, formularemos previamente algunas definiciones.

Una sucesión se llama *limitada o acotada superiormente* si todos sus términos son menores que un mismo número. Análogamente, una sucesión se llama *limitada o acotada inferiormente* si todos sus términos son mayores que un mismo número.

E j e m p l o s. 1) La sucesión $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ está acotada superiormente por el número 2 o por un número cualquiera mayor que 2:

$a_n < 2$ para todo n,

2) La sucesión $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ está acotada inferiormente por el número 2 o por cualquier número positivo menor que 2: $x_n > 2$ para todo n.

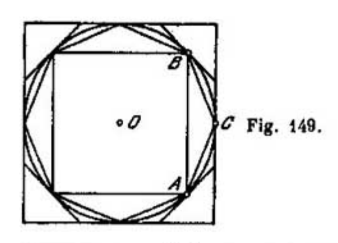


Fig. 149.

Una sucesión se llama *monótona creciente*, si cualquier término es mayor que cualquier precedente (o igual a él). La sucesión se llama *monótona decreciente*, si cualquier término es menor que cualquier precedente (o igual a él). De las sucesiones dadas en los ejemplos de este párrafo la primera es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.

Formulemos ahora el criterio de existencia del límite de una sucesión.

Una sucesión monótona creciente, limitada superiormente, tiene límite; del mismo modo, la sucesión monótona decreciente, limitada inferiormente, tiene límite.

§ 238. Longitud de una circunferencia como límite

Construimos una circunferencia de radio unitario, inscribimos en ella y la circunscribimos de cuadrados (fig. 149). A continuación, duplicando el número de lados de cada nuevo polígono construimos octágonos regulares inscrito y circunscrito y así continuamos ilimitadamente inscrito o circunscrito obtenido. Luego, la sucesión compuesta de los perímetros de los polígonos inscritos p_1, p_2, p_3, . . . , es la sucesión monótona creciente, limitada superiormente.

El perímetro de un cuadrado inscrito es menor que el perímetro de un octágono regular inscrito, es decir, $p_1 < p_2$, puesto que la suma de dos lados del octágono es mayor que el lado del cuadrado: $AC + CB > AB$.

Exactamente del mismo modo $p_2 < p_3$, $p_3 < p_4$, etc. Pero, sea cual fuere el modo de crecimiento de esta sucesión, ella está limitada superiormente por el perímetro de un cuadrado circunscrito, es decir, por el número $P_1 = 8$, ya que el cuadrado circunscrito, como quebrada envolvente,

es mayor que la quebrada inscrita y así cualquier polígono inscrito. La sucesión de perímetros de los polígonos regulares circunscritos

$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$

es monótona decreciente, puesto que el cuadrado circunscrito es envolvente con respecto al octágono circunscrito.
Por lo tanto, $P_1 > P_2$. Sobre la misma base $P_2 > P_3$, etc.
La limitación de la sucesión inferiormente se deduce de que cualquier de los números de la sucesión $P_1, P_2, P_3, \ldots$ es mayor que cualquier término de la sucesión $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$
En consecuencia, ambas sucesiones tienen límite. Como se verá en el § 241 (ejemplo 6), este límite es común y se toma como longitud de la circunferencia.

● DEFINICIÓN. Se toma como *longitud de una circunferencia* el límite común de las sucesiones de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuando el número de lados de los polígonos crece ilimitadamente. La longitud de la circunferencia se designa por la letra C.

§ 239. Cálculo de la longitud de una circunferencia

Los matemáticos de los siglos XVI, XVII y XVIII, sin saber que la circunferencia rectificada es un segmento inconmensurable con su radio, trataron de hallar con gran exactitud la longitud de la circunferencia por el método de los perímetros. Para ello utilizaron la llamada *fórmula de duplicación*:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Sigamos su ejemplo.
Se sabe que el lado de un cuadrado inscrito $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \sqrt{2}$ cuando $R = 1$. Por la fórmula de duplicación, tendremos: $a_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, etc. Si el número de lados es bastante grande, por el lado calculado hallamos el perímetro y lo tomamos como longitud aproximada de la circunferencia.

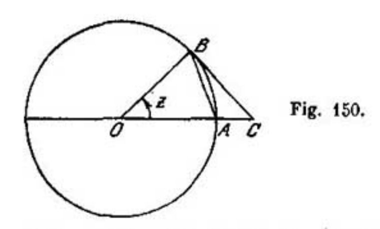


Fig. 150.

De este modo, se calculó el perímetro de los polígonos inscrito y circunscrito con un número de lados $2n = 3072$ (como polígono inicial se tomó un hexágono, y no un cuadrado, como lo hicimos nosotros).
Resultó que cuando $R = 1$

$$p \approx 6{,}2831842, \quad P \approx 6{,}2831876.$$

De aquí

$$\pi = \frac{C}{2R}\Big|_{R=1} \approx 3{,}141592.$$

Sólo en el siglo XIX se demostró que el número π es irracional.

§ 240. Dos límites notables

1) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$. El límite de la relación entre el seno de argumento infinitamente pequeño y el propio argumento es igual a 1.
Tracemos una circunferencia de radio unitario (fig. 150) y en ella un ángulo central agudo $\angle AOB = z$; unimos los puntos A y B con una cuerda y en el punto B trazamos la tangente a la circunferencia, el punto C es la intersección de la tangente con la prolongación del radio OA. Podemos escribir las siguientes desigualdades:

$$\text{sup. } \triangle\, AOB < \text{sup. del sector } AOB < \text{sup. } \triangle\, OBC,$$

o bien

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \operatorname{sen} z < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot z < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} z. \qquad (1)$$

[Aquí se utilizaron casos conocidos de geometría y trigonometría:

a) la superficie de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos; b) la superficie de un sector es igual al semiproducto de la longitud del arco por el radio;
c) la superficie de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de los catetos, donde el cateto $BC = \operatorname{tg} z$.]
Multiplicamos todos los términos de la desigualdad (1) por 2, y luego dividimos por sen z (sen $z > 0$). Obtenemos una desigualdad del mismo sentido

$$1 < \frac{z}{\operatorname{sen} z} < \frac{1}{\cos z},$$

o bien

$$1 > \frac{\operatorname{sen} z}{z} > \cos z \tag{2}$$

$\left(\text{si } a < b, \text{ tendremos que } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ cuando } a > 0\right)$.

Si $z \to 0$ los términos extremos de la doble desigualdad (2) tienden a un límite común, igual a 1, por lo tanto, la relación comprendida entre ellos $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene el mismo límite, es decir

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

Observación. En lugar de z se puede poner cualquier otra magnitud infinitamente pequeña. Por ejemplo

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1, \ z = 5x;$

2) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{3}}{\frac{\pi y}{3}} = 1, \ z = \frac{\pi y}{3};$

3) $\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \ z = \frac{1}{x}.$

Pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \neq 1,$$

puesto que aquí no hay concordancia: bajo el signo de seno tenemos $3x$ infinitamente pequeño, y en el denominador

de la fracción se encuentra x, también infinitamente pequeño, pero diferente. Luego, el límite se encuentra del siguiente modo:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\,\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\cdot 1 \quad (z = 3x).$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Examinemos la sucesión, cuyo término general es

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es número natural.
La siguiente tabla nos muestra como varía x_n cuando n crece:

x_n	1	2	3	...	10	100	10 000	1 000 000	...
x_n	2,00000	2,2500	2,3704	...	2,59982	2,70481	2,71815	2,71828	...

De esta tabla se nota que con el crecimiento de n, x_n también crece, aunque el ritmo de crecimiento se atenúa: al comienzo, cuando n varía de 1 a 2, x_n varía de 2 a 2,25, es decir, en 0,25; en cambio al variar n de 10^4 a 10^6, x_n aumenta en total 0,00013.
Admitamos sin demostración que la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende a un límite determinado al crecer ilimitadamente n $(n\to\infty)$ (se puede demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente y está limitada superiormente, por ejemplo, por el número 3). Este límite se designa por la letra e.
El número e es irracional; sus primeras cifras decimales son:

$$e = 2{,}7182818284590\ \ldots, \text{ o bien } e \approx 2{,}718.$$

Antes dijimos que los logaritmos de base e se llaman *naturales* y se designan por «ln».
Se puede demostrar también que

$$\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Para ello es suficiente poner $\frac{1}{\alpha}=n$, en tal caso $n\to\infty$ cuando $\alpha\to 0$.

El número e es de suma importancia tanto en matemáticas como en otras ciencias.

§ 241. Ejemplos de determinación de límites

Ejemplo 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)$.

Al comienzo utilizamos el teorema del límite de una suma algebraica y simultáneamente sacamos los factores constantes fuera del signo de límite, después, el teorema del límite de una potencia:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)=$$
$$=\lim_{x\to 2}x^3-3\lim_{x\to 2}x^2+8\lim_{x\to 2}x+5=$$
$$=2^3-3\cdot 2^2+8\cdot 2+5=17.$$

En este caso el límite se podía haber obtenido con más sencillez si se hubiera sustituido directamente x por su valor límite:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)=2^3+3\cdot 2^2+8\cdot 2+5=17.$$

Ejemplo 2. Hallar $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

Si en este ejemplo ponemos en lugar de x su límite 3, obtendremos una indeterminación:

$$\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0},$$

lo que nos dice que el teorema del límite de un cociente no es aplicable (el límite del denominador es igual a 0), pero

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3. \qquad (1)$$

La igualdad (1) se cumple para todo $x\neq 3$. En este caso se considera que los límites de ambos miembros deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

Ejemplo 3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Puesto que el límite del denominador nuevamente es igual a cero cuando $x \to 0$, no podremos utilizar el teorema del límite de un cociente; transformemos la fracción dada hasta el paso al límite:

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} =$$
$$= \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1) =$$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{1+3\cdot 0}+1) = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 4. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2+x+1}$.

Puesto que con el signo ∞ no se puede tratar como con un número, hay que transformar la fracción dada:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3+0}{1+0+0} = 3,$$

ya que $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\frac{1}{x^2} \to 0$ para $x \to \infty$.

Ejemplo 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$.

Representemos la expresión bajo el signo de límite en la siguiente forma:

$$\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{6\cdot\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = 6\,\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}.$$

En tal caso

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(6\,\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}\right)=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

$$\left(\text{puesto que } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right).$$

Ejemplo 6. Demostrar que las sucesiones, compuestas de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, durante la duplicación ilimitada del número de sus lados tienden al mismo límite C.

Supongamos que p_n es el perímetro del n-ésimo polígono inscrito y P_n es el perímetro del n-ésimo polígono circunscrito. Examinemos cómo varía su relación

$$\frac{p_n}{P_n}=\frac{h_n}{R}$$

(los perímetros de semejantes polígonos regulares son proporcionales a sus apotemas)

Teniendo en cuenta que el apotema h_n del polígono regular inscrito tiende a R cuando $n\to\infty$, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}h_n}{R}=\frac{R}{R}=1.$$

Dado que el límite de la relación de los perímetros es igual a 1, se deduce que C es su límite común.

Ejemplo 7. Deducir la fórmula de la superficie de un círculo, considerando la superficie del círculo como el límite común de dos sucesiones de las superficies de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuando el número de sus lados se duplica ilimitadamente.

La superficie del n-ésimo polígono regular inscrito es igual al semiproducto del perímetro por el apotema:

$$q_n=\frac{1}{2}\,p_nh_n,$$

donde q_n es la superficie; p_n, el perímetro; h_n, el apotema del n-ésimo polígono. Luego

$$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(p_nh_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}p_n\lim_{n\to\infty}h_n=\frac{1}{2}CR=\pi R^2.$$

Aquí se aplicó el teorema del límite de un producto. Para el polígono circunscrito tendremos que $Q_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{1}{2} R \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2} RC = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

§ 242. Suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente

● DEFINICIÓN. La progresión geométrica cuyo denominador, según el módulo, es menor que la unidad ($|q| < 1$), se llama *infinitamente decreciente* o *convergente*. La suma de sus n primeros términos se puede calcular por la fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Representemos S_n en la siguiente forma:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n. \qquad (1)$$

Supongamos que el número de términos n crece ilimitadamente ($n \to \infty$). En tal caso,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n.$$

Pero $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ ($|q| < 1$); por lo tanto

$$\frac{a_1}{1-q} q^n \to 0$$

como producto de una constante por una magnitud infinitamente pequeña, y por eso

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

● DEFINICIÓN. El límite al que tiende la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente al crecer ilimitadamente el número de términos n se llama *suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente*. Por consiguiente

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{donde } S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

La suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente es igual al primer término a_1 dividido por la diferencia entre la unidad y el denominador (o razón) de la progresión q.

§ 243. Conversión de una fracción decimal periódica en ordinaria

Representemos la fracción decimal periódica infinita $\alpha = 0{,}3151515\ldots$ en la forma:

$\alpha = 0{,}3 + 0{,}015 + 0{,}00015 + 0{,}0000015 + \ldots,$

$\alpha = 0{,}3 + 15\cdot 10^{-3} + 15\cdot 10^{-5} + 15\cdot 10^{-7} + \ldots$

El segundo miembro de esta igualdad, comenzando del segundo término, es la suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente de denominador o razón $q = 10^{-2}$, y, por eso,

$$\alpha = 3\cdot 10^{-1} + \frac{15\cdot 10^{-3}}{1-10^{-2}},$$

$$\alpha = \frac{3}{10} + \frac{15}{990} = \frac{3\cdot 99+15}{990} = \frac{3(100-1)+15}{990} = \frac{315-3}{990},$$

$$\alpha = \frac{312}{990} = \frac{52}{165}.$$

R e g l a. *Para convertir una fracción periódica mixta en una ordinaria, hay que restar del número, que se encuentra hasta el segundo período, el número que se encuentra hasta el primer período, y tomar esta diferencia como numerador; en calidad de denominador se escribe la cifra* 9 *tantas veces como cifras hay en el período y se agrega a ellas tantos* 0 *como cifras hay hasta el período.*

E j e m p l o. Convertir $\beta = 0{,}42777\ldots$ en una fracción ordinaria

$$\beta = \frac{427-42}{900} = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}.$$

Observación. Es más fácil convertir una fracción períodica pura, por ejemplo, $1{,}272727\ldots$, en una ordinaria:

$$1{,}272727\ldots = 1 + \frac{27-0}{99} = 1\,\frac{27}{99} = 1\,\frac{3}{11}.$$

§ 244. Comparación de magnitudes infinitamente pequeñas

Las distintas magnitudes infinitamente pequeñas o infinitésimas tienen de común, que durante su variación cada una de ellas tiende indefectiblemente a cero, en caso contrario no serían infinitamente pequeñas.

Resulta que el proceso de tender a cero de las diferentes magnitudes infinitamente pequeñas no es idéntico: unas se aproximan a cero «más rápidamente» que otras. Esto se aprecia del siguiente ejemplo elemental.

Si $x \to 0$, tendremos que x^2 tambien tiende a cero. Supongamos que x recorre la sucesión numérica $x = 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \ldots$ En tal caso, $x^2 = 1; 0,01; 0,0001; 0,000001; \ldots$

Se nota inmediatamente que x^2 se aproxima a cero más rápidamente que x. Pero el hecho de que una magnitud se aproxima a cero más rápidamente que otra, por ahora carece aún de sentido matemático exacto: queda sin explicación lo que se entiende por «rapidez» con la cual las magnitudes infinitamente pequeñas tienden a cero, ¿cómo se mide?

Introduzcamos nuevos conceptos matemáticos, con los que discribiremos el distinto carácter de aproximación a cero de las magnitudes infinitamente pequeñas o infinitésimas. Los nuevos conceptos se basan en la idea de comparación de dos infinitésimas mediante la determinación del límite de su relación (cociente).

● DEFINICION 1. Dos magnitides infinitamente pequeñas α y β se llaman infinitésimas de *igual orden* si el límite de su relación es igual a un número A distinto de 0.

Por consiguiente, si el lím $\frac{\beta}{\alpha} = A$ ($A \neq 0$, $A \neq \infty$), α y β son infinitésimas de igual orden.

E j e m p l o. $\alpha = 3(x-1)$ y $\beta = x - 1$ son infinitésimas de igual orden cuando $x \to 1$, puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{3(x-1)} = \frac{1}{3}.$$

● DEFINICIÓN 2. La magnitud infinitamente pequeña β se llama infinitésima de *orden superior* en comparación con la infinitésima α si el límite de su relación es igual a cero. En la notación matemática esta definición se expresa del siguiente modo: si lím $\frac{\beta}{\alpha} = 0$, $\beta = 0(\alpha)$. La notación $\beta = 0(\alpha)$ se lee así: β es infinitésima de orden superior respecto de la infinitésima α.

E j e m p l o s. 1) x^2 es una infinitésima de orden superior respecto a x al tender x a cero, puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

2) $\beta = (2x-1)^3$ y $\alpha = (2x-1)^2$. Aquí $\beta = o(\alpha)$ para $x \to \frac{1}{2}$, puesto que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1) = 0$.

§ 245. Infinitésimas equivalentes

Entre las distintas infinitésimas de las matemáticas aplicadas son importantes aquellas cuyo límite de la relación es igual a 1.

● DEFINICIÓN. Dos infinitésimas α y β se llaman *equivalentes* si el límite de su cociente es igual a 1.

Si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, $\beta \sim \alpha$. Aquí el signo $\sim$ sustituye la palabra «equivalente» y se llama signo de equivalencia.

Veamos algunos ejemplos:

1) $\operatorname{sen} x \sim x$, 2) $\operatorname{tg} x \sim x$, 3) $\operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x$ cuando $x \to 0$.

Por eso, para los valores de x próximos a cero, los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$ se pueden considerar iguales al número x, es decir, a la medida del ángulo en radianes.

Por ejemplo: 1) $\operatorname{sen} 2^\circ = \operatorname{sen} 0{,}035 \approx 0{,}035$,

2) $\operatorname{tg} 1^\circ 40' = \operatorname{tg} 0{,}029 \approx 0{,}029$.

La equivalencia del seno y de la tangente está reflejada en la disposición de la escala común para el seno y la tangente de ángulos pequeños en el reverso de la corredera de la regla de cálculo (véase § 207).

Señalemos un importante par de infinitésimas equivalentes más. Comprobemos que

$\ln(1+x) \sim x$ cuando $x \to 0$.

En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} [\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln [\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

De aquí, por ejemplo, se deduce que:

1) $\ln 0{,}9985 = \ln(1-0{,}0015) \approx -0{,}0015$,

2) $\ln 1{,}043 = \ln(1+0{,}043) \approx 0{,}043$.

En consecuencia, podemos hallar fácilmente los logaritmos naturales de los números próximos a la unidad.

Se demuestra fácilmente que

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2} \text{ cuando } x \to 0,$$

puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1.$$

Por eso en los cálculos aproximados se utiliza la fórmula $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ (x es un número próximo a 0).

De origen análogo es la fórmula $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$, deducida de la equivalencia de las infinitésimas

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ y $\beta = -\frac{x}{2}$ cuando $x \to 0$.

Ejemplos.

$\sqrt{0{,}992} = \sqrt{1+(-0{,}008)} \approx 1-0{,}004 = 0{,}996$,

$\frac{1}{\sqrt{1{,}082}} \approx 1-\frac{0{,}082}{2} = 1-0{,}041 = 0{,}959$.

§ 246. Incremento del argumento y de la función

Supongamos dada la función $y = 3x^2 - 5x + 8$. Si el argumento x toma el valor $x_1 = 2$, el valor correspondiente de la función es $y_1 = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 8 = 10$.
Para otro valor del argumento $x_2 = 4$, la función adquiere el valor $y_2 = 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 8 = 36$.
Al variar el argumento en la magnitud $x_2 - x_1 = 2$ la función dada varía en la magnitud $y_2 - y_1 = 26$.

● DEFINICION. La diferencia de dos valores del argumento se llama *incremento del argumento* y se designa por: $x_2 - x_1 = \Delta x$ («delta x»).
Análogamente, la diferencia de los dos valores correspondientes de la función se llama *incremento de la función*, cuya notación es: $y_2 - y_1 = \Delta y$ («delta y»). En nuestro ejemplo $\Delta x = 2$; $\Delta y = 26$.
Los incrementos del argumento y de la función pueden ser positivos, negativos y nulos. Por ejemplo, si $y = 1/x$, y el argumento x pasa del valor $x_1 = 5$ al valor $x_2 = 1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 5 = -4$. En este caso el incremento de la función es

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

En este ejemplo al incremento negativo del argumento corresponde un incremento positivo de la función.
Es muy importante aprender a hallar los incrementos de distintas funciones en forma general, cuando no se fija en forma de un número determinado el valor inicial (x_1) o final (x_2) del argumento. En tal caso, se utilizan con más frecuen-

cia las siguientes designaciones: el valor inicial del argumento se designa simplemente por x (sin subíndice); el valor final por $(x + \Delta x)$.
El valor inicial de la función se designa por y o bien $f(x)$; el valor final por $(y + \Delta y)$ o bien $f(x + \Delta x)$.

E j e m p l o 1. Hallar en forma general el incremento de la función

$$y = x^3 - 2x + 5. \tag{1}$$

En el segundo miembro de la igualdad (1) el argumento x lo sustituimos por $(x + \Delta x)$ y realizamos con $(x + \Delta x)$ todas las operaciones que se deben realizar con x. Al mismo tiempo en el primer miembro y se sustituye por $(y + \Delta y)$:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 5$$

o bien

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2\Delta x + 5. \tag{2}$$

Cabe hacer notar que $(y + \Delta y)$ se llama *incremento del valor* de la función. De la igualdad (2) restamos la igualdad (1):

$$\Delta y = (3x^2 - 2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Precisamente ésta es la fórmula general para el incremento de la función dada. Si $x = 5$, $\Delta x = -1$, tendremos que $\Delta y = -73 + 15 - 1 = -59$.

E j e m p l o 2. $f(x) = \operatorname{sen} x$. Hallar el incremento de $f(x)$ cuando x se incrementa en Δx:

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x),$$
$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x,$$

o bien, transformando la diferencia de dos senos en un producto, obtenemos finalmente:

$$\Delta f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

En la fig. 151 se muestra la gráfica de la función $y = f(x)$. En la curva se ha tomado el punto $M(x, y)$ de abscisa x y ordenada y. Si el punto M se mueve por la curva a una nueva posición M_1, sus nuevas coordenadas serán $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$. Por consiguiente, *el incremento del argumento Δx es el incremento de la abscisa, y el incremento de la función*

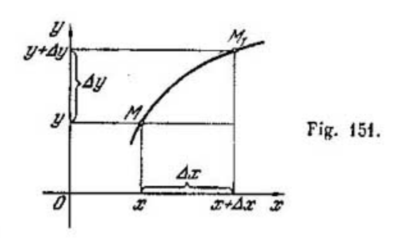


Fig. 151.

Δy es el incremento de la ordenada del punto M en la curva $y = f(x)$.

§ 247. Continuidad de una función

Detengámonos en una importante propiedad de la función, que utilizamos numerosas veces al construir las gráficas, pero que aún no le hemos dado una definición matemática exacta. Supongamos que $y = f(x)$ es una función arbitraria, x_0 es un punto del campo de definición de la función dada, de manera que $f(x_0)$ es un número real. Considerando x_0 como valor inicial del argumento, le daremos un incremento Δx.

Este incremento puede ser un número positivo o negativo: en los razonamientos ulteriores su signo no tendrá importancia. Al valor incrementado del argumento, igual a $x_0 + \Delta x$, corresponde un valor incrementado de la función, igual a $f(x_0 + \Delta x)$. La diferencia $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ es el incremento de la función:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Vamos a reducir lentamente el valor absoluto del incremento del argumento, haciendo que $\Delta x \to 0$. Si en este caso el incremento de la función Δy también tiende a cero, se dice que: la función $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$.

● DEFINICIÓN 1. Una función se llama *continua* en el punto $x = x_0$, si a un incremento infinitésimo del argumento, en ese punto, corresponde un incremento infinitésimo de la función. Conviene señalar que en la propia definición de continuidad no se tiene claramente el requisito de que la función esté definida en el punto x_0. En efecto, si en el punto x_0 la función no estuviese definida, no tendría

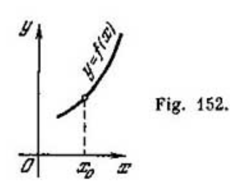


Fig. 152.

sentido hablar de incremento de la función en ese punto, y, por lo tanto, de continuidad.

En la interpretación geométrica la continuidad de la función en el punto $x = x_0$ significa que la gráfica de la función en el entorno del punto x_0 es una curva continua sin discontinuidades (fig. 152).

DEFINICIÓN 2. Si la función es continua en cualquier punto del intervalo (a, b), se llama *continua en ese intervalo.*

DEFINICIÓN 3. El punto, en el cual no se cumple la condición de continuidad se denomina *punto de discontinuidad* y la función se denomina *discontinua* en ese punto.

Ejemplo 1. Vamos a comprobar que, para todo $x \neq 0$, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua.

Hallamos el incremento de la función en el punto $x \neq 0$. Tendremos que $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

Hacemos tender el incremento Δx a cero y hallamos el límite del incremento Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

Aquí aplicamos el teorema del límite de un cociente y de un producto. Resultó que cuando $\Delta x \to 0$, simultáneamente también $\Delta y \to 0$, lo que denota la continuidad de la función para todo $x \neq 0$.

Ejemplo 2. Demostrar que en el punto $x = 4$ la función $y = \frac{x}{\lg(x-3)}$ es discontinua.

La discontinuidad de la función en el punto $x = 4$ se debe a que la $f(x)$ no está definida en dicho punto (el denominador $\lg(x-3)|_{x=4} = \lg 1 = 0$, y por cero no se puede dividir).

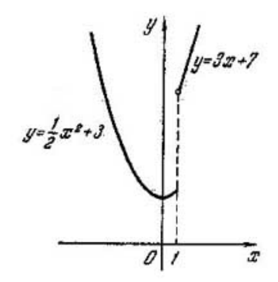


Fig. 153.

E j e m p l o 3. La función $f(x)$ está dada por dos fórmulas

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+3 & \text{para } x\leqslant 1,\\ 3x+7 & \text{para } x>1.\end{cases}$$

Demostrar que en el punto $x = 1$ la función es discontinua. En este ejemplo, a diferencia del anterior, la función está definida en el punto $x = 1$: $f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 3 = 3{,}5$. Queda verificar si Δy tiende o no a 0 cuando $\Delta x \to 0$, sea cual fuere el signo del incremento Δx.

1) Supongamos que el argumento x al principio adquiere un incremento negativo $(-\Delta x)$, en tal caso el incremento de la función en el punto $x = 1$ es igual a $f(1 - \Delta x) - f(1) = \left[\frac{1}{2}(1-\Delta x)^2 + 3\right] - 3{,}5$, o bien $\Delta y = -\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2}$. Si $(-\Delta x) \to 0$, tendremos que Δy, como suma algebraica de dos infinitésimas, también tiende a cero.

2) Si Δx es positivo el valor del argumento es igual a $1 + \Delta x$, el incremento de la función es

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1).$$

Pero $1 + \Delta x > 1$ y, por eso, de acuerdo a la regla de planteamiento de dicha función (cuando $x > 1$, la función es $f(x) = 3x + 7$)$f\ (1 + \Delta x) - f(1) = [3(1 + \Delta x) + 7] - 3{,}5$, $\Delta y = 3\cdot\Delta x + 6{,}5$.

Si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 6{,}5$. Por consiguiente, en el punto $x = 1$ la función es discontinua (fig. 153).

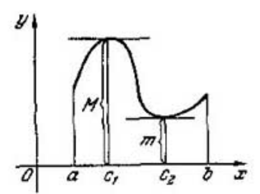


Fig. 154.

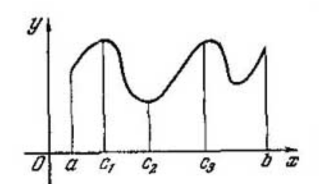


Fig. 155.

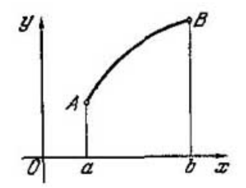


Fig. 156.

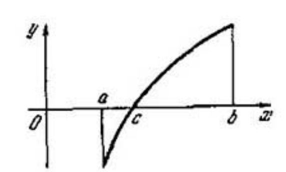


Fig. 157.

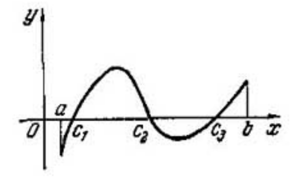


Fig. 158.

§ 248. Propiedades de una función continua en un segmento

1. La función continua en el segmento $[a, b]$ toma su valor mayor (M) aunque sea en un punto de este segmento, y su valor menor (m) aunque sea en un punto:
1) En la fig. 154 el valor mayor corresponde al punto $x = c_1$; el valor menor, al punto $x = c_2$.
2) En la fig. 155 se muestra que se alcanza el valor mayor en dos puntos c_1 y c_3, y el valor menor, sólo en el punto c_2.
3) Si la función en el segmento dado crece en todas las partes (la gráfica es la curva ascendente), el valor menor de la función corresponde al extremo izquierdo del segmento, el valor mayor, al extremo derecho (fig. 156); en el caso de la curva descendente, es al contrario.

2. Si en los extremos del segmento $[a, b]$ la función continua toma valores de signos contrarios, al menos en un punto intermedio del segmento ella se anula (la gráfica de la curva corta el eje Ox). En la fig. 157 se muestra que en el extremo izquierdo del segmento $[a, b]$ la función es negativa; en el extremo derecho es positiva, y en el punto intermedio c $(a < c < b)$ la función se anula $f(c) = 0$.
En la fig. 158 se muestran tres puntos de intersección con el eje Ox.
En general los puntos de intersección con el eje Ox puede ser sólo un número impar.

▲ Ejercicios

1. Citar ejemplos de funciones tomados de geometría y de física.
2. Expresar la longitud de la cuerda de una circunferencia de radio R (R es constante) en función de la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda.
3. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, calcular: $f(0)$; $f(-2)$; $\frac{1}{f(1)}$; $f^2(1)$; $[1+f(1)]^2$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{sen} f(0)$.
4. Demostrar que si $\varphi(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, entonces $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)=\varphi(x_1+x_2)$, $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}=\varphi(x_1-x_2)$.
5. $f(x)=\lg x$; demostrar que $f(ab)=f(a)+f(b)$, $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$.
6. Hallar el campo de definición para cada una de las funciones:
1) $y=\frac{3x-2}{x+5}$; 2) $y=\frac{2}{x^2+3x}$; 3) $y=\sqrt{3-2x}$;
4) $y=\frac{1}{\sqrt{2-3\cos x}}$; 5) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; 6) $y=\lg(x^2-4)$;
7) $y=\lg(-3x^2+5x+2)$; 8) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{2x-5}{3}$; 9) $y=\frac{2+\operatorname{sen} x}{2-\sqrt{8\cos x}}$;
(10) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; 11) $y=\arccos\frac{3}{x^2+1}$; 12) $y=\sqrt{\lg(x+3)}$.
7. Indicar cuales de las funciones dadas a continuación son pares, impares, o ni una ni otra:
1) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2x+1}$; 3) $y=3^x+3^{-x}$; 4) $y=x\sqrt{9-x^2}$;
5) $y=2x-3\operatorname{sen} x$; 6) $y=2^x-2^{-x}$; 7) $y=3\operatorname{arc\,tg} x+1$;
8) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; 10) $y=\operatorname{sen}(x^2)$;

11) $y=\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$; 12) $y=\operatorname{sen}^2 2x+\sqrt{4-x^2}$.

8. Demostrar que el producto y el cociente de dos funciones impares es una función par.

9. Demostrar que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones pares es una función par.

10. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1) $y=\lg(x-3)$; 2) $y=\lg|x-3|$; 3) $y=\frac{x}{x-3}$;

4) $y=2^{-x}$; 5) $y=2^{|x|}$;

6) $y=x^2-3|x|+2$; 7) $y=\arccos\frac{x}{x^2+1}$;

8) $y=\lg\frac{3-x^2}{1+x^2}$; 9) $y=\operatorname{sen} x+\cos 2x-1$; 10) $x=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

11) $y=|\operatorname{sen} x|$; 12) $y=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1$.

11. Escribir los primeros cinco términos de las sucesiones:

1) $a_n=\frac{2n}{n+3}$; 2) $a_n=\frac{(-1)^n n}{2n-1}$; 3) $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n^2+1}$.

12. Demostrar que el apotema del polígono regular inscrito en un círculo tiende al radio del círculo para $n\to\infty$. 13. Demostrar que la sucesión $a_n=\frac{3n-1}{n+2}$ tiende al límite $a=3$ para $n\to\infty$.

14. Hallar los límites de las siguientes funciones:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

15. ¿A qué valor numérico menor no negativo debe tender el argumento x para cada una de las funciones indicadas más abajo por separado, para que ellas sean infinitamente grandes:

1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\operatorname{tg} x$; 3) $y=\frac{2}{1-\cos x}$; 4) $y=\frac{3}{1+\lg x}$?

16. Hallar los límites de las funciones

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ?x}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

17. Demostrar que cuando $x \to 0$

1) $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$; 2) $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$; 3) $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3} x$.

18. Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones y mostrar la forma de sus gráficas

1) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 2) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; 3) $y=\frac{1}{1-\cos x}$.

19. Demostrar que las funciones dadas a continuación son continuas en todo el eje numérico:

1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $y=\operatorname{sen} x$; 4) $y=\sqrt[3]{x}$.

CAPITULO XVII

DERIVADA

§ 249. Introducción

Al estudiar la función lineal $y = kx + b$ (§ 51) se indicó que el camino S recorrido por un cuerpo en movimiento uniforme es una función lineal del tiempo: $S = vt + S_0$ Aquí en lugar del coeficiente de proporcionalidad k está la velocidad v, constante en dicho movimiento e interpretada como el camino recorrido en la unidad de tiempo.

Todo proceso uniforme se caracteriza por una función lineal y tiene la particularidad de que la variación de la función es proporcional a la variación del argumento:

$$\Delta y = k\Delta x. \qquad (1)$$

En realidad, si

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

entonces

$$y + \Delta y = k(x + \Delta x) + b. \qquad (3)$$

Restando de la igualdad (3) la igualdad (2), llegamos a la correlación (1). Es natural llamar al número $k \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *velocidad de la función lineal* independientemente del sentido físico que tengan las variables x e y, en cada caso particular, puesto que cuando $\Delta x = 1$ simpre el incremento $\Delta y = k$ denota la variación de la función, que se produce en la unidad de variación del argumento, lo que por analogía con el movimiento uniforme es la velocidad de variación de dicha función.

Se presenta de un otro modo cuando nos encontramos con procesos no uniformes (irregulares), tales, por ejemplo, como el movimiento irregular, el enfriamiento de un cuerpo caliente en un medio de temperatura constante, la salida de un líquido de un orificio a una presión variable y otros fenómenos.

Aquí surgen dos preguntas:
1) ¿qué se denomina velocidad de un proceso irregular?
2) ¿cómo calcular esta velocidad después de dar la propia definición de velocidad?
Las respuestas a estas preguntas se dan en el siguiente párrafo.

§ 250. Problemas que conducen al concepto de derivada

1. Problema de determinación de la velocidad de un movimiento irregular. Después de conectar, un ascensor se mueve por la ley

$$S = 1{,}5t^2 + 2t + 12,$$

donde t es el tiempo en segundos, S es el camino recorrido en metros. Hallar la velocidad del movimiento al final del cuarto segundo, considerando desde el instante inicial de movimiento.
Formemos el siguiente cuadro

t	0	1	2	3	4	5
S	12	15,5	22	31,5	44	59,5
Δt	1	1	1	1	1	
ΔS	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	

De aquí se aprecia que en distintos intervalos de tiempo el ascensor recorre distintos caminos: en el primer segundo 3,5 m, en el segundo 6,5 m, en el tercero 9,5 m, etc. El movimiento del ascensor se acelera y, por ahora, no sabemos qué admitir como velocidad del movimiento al final del cuarto segundo y, en general, para cualquier otro instante de tiempo.
Examinemos el intervalo de tiempo desde el final del cuarto segundo hasta $(4 + \Delta t)$ *s*. El camino recorrido en este intervalo de tiempo se calcula fácilmente:
para $t = 4$ el camino $S = 1{,}5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 12 = 44$ (m),
para $t = 4 + \Delta t$ el camino $S + \Delta S = 1{,}5 \cdot (4 + \Delta t)^2 + 2(4 + \Delta t) + 12$ (m). Restando tendremos que:

$$\Delta S = 14 \cdot \Delta t + 1{,}5\,(\Delta)^2.$$

Introducimos el concepto de velocidad media.

● DEFINICIÓN. *Se llama velocidad media en el intervalo de tiempo Δt (s) el cociente de dividir el incremento del camino ΔS entre el incremento del tiempo Δt:*

$$v_{med} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1)$$

En nuestro ejemplo

$$v_{med} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{14\Delta t + 1,5(\Delta t)^2}{\Delta t},$$

$$v_{med} = 14 + 1,5\Delta t \text{ (m/s)}.$$

Vamos a hallar la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores, uttilizando la fórmula (1):

Δt	1	0,1	0,01	0,001
v_{med}	15,5	14,15	14,015	14,0015

Hallamos la velocidad *instantánea* si el intervalo Δt lo consideramos una magnitud infinitésima, es decir, $\Delta t \to 0$; luego

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} (14 + 1,5 \cdot \Delta t) = 14 \text{ (m/s)}.$$

De este modo, *la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media en un intervalo de tiempo infinitésimo*:

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Problema de determinación de la densidad lineal de una barra heterogénea. Se llama *barra* un cuerpo físico tal, que por su forma se parece a un segmento de recta, por ejemplo, un alambre, una vara delgada; en este caso se supone que las secciones transversales de la barra a lo largo de toda su longitud son iguales y pequeñas en comparación con su longitud.

Si la barra es homogénea, a lo largo de su longitud la masa está distribuida uniformemente y, en ese caso, se llama su *densidad lineal* el cociente de su masa sobre la longitud: $\gamma = \frac{M}{l}$.

Si la barra es heterogénea, es decir, la masa está distribuida irregularmente a lo largo de su longitud (la barra está hecha de distintos materiales), no se puede hablar de densidad de la barra, en general, puesto que su masa por 1 cm

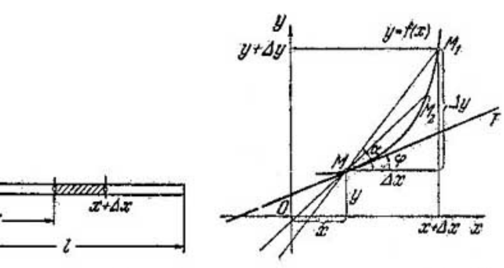


Fig. 159. Fig. 160.

de longitud será diferente, según a qué distancia del origen de la barra se toma una porción de barra del largo de 1 cm. Supongamos que conocemos la ley de distribución de la masa: $M = f(x)$. La masa es función de la distancia al origen de la barra. Hay que determinar la densidad en la sección x (fig. 159). Tomamos una sección próxima a la distancia $x + \Delta x$. Al incremento Δx de la longitud de la barra corresponde el incremento de la masa ΔM. En consecuencia, $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ es la densidad media lineal de la porción de barra entre las secciones x y $x + \Delta x$.

El límite de la densidad media, a condición de que el incremento de la longitud de la barra $\Delta x \to 0$, se llama *densidad lineal de la sección* x:

$$\gamma_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x}.$$

3. Problema del trazado de una tangente a la curva. Dada la parábola $y = 0{,}5x^2$, hay que trazar una tangente a esta curva en el punto de abscisa igual a x.

Previamente hay que precisar el mismo concepto de «tangente a una curva». Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua, cuya gráfica está representada en la fig. 160. Tomemos en la curva un punto arbitrario $M(x; y)$, que consideraremos inmóvil, un punto fijo. Nos desplazamos por la curva del punto M a la nueva posición M_1; las coordenadas del punto M_1 las designamos por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, de manera que $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Uniendo los puntos M y M_1 por una recta, obtendremos la secante MM_1. Hacemos que el punto M_1 se aproxime ilimitadamente al punto M

(el punto M_2 es una posición intermedia), en tal caso, la secante MM_1 girará alrededor del punto M y en el instante de confluencia del punto M_1 con el punto M llegará a ser *tangente* MT a la curva en punto M.

DEFINICIÓN. Se llama *tangente a una curva en un punto dado* M la posición límite de la secante MM_1.

El punto M de la curva, en el que se traza la tangente, generalmente se determina por su abscisa x, puesto que conociendo la abscisa y la ecuación de la curva se determina fácilmente el propio punto M.

Partiendo de esta definición de la tangente, se puede hallar por medio de cálculos la posición de la tangente: la recta (la tangente es una recta) en el sistema de coordenadas se determina completamente por el punto, a través del cual ella pasa, y por su dirección, es decir, por el coeficiente angular $k = tg\,\varphi$. Teniendo en cuenta esta consideración, resolvemos el problema concreto de trazado de una tangente a la parábola $y = 0{,}5x^2$ en un punto arbitrario de abscisa x. Tomemos dos puntos de la parábola: $M\ (x;\ y)$ y $M_1\ (x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. La secante MM_1 forma con el sentido positivo del eje Ox el ángulo α; además, el coeficiente angular de la secante, es decir, la $\operatorname{tg}\alpha$, es igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (véase la fig. 160).

Pero

$$y = 0{,}5\cdot x^2, \quad y + \Delta y = 0{,}5\,(x + \Delta x)^2,$$

de donde restando hallamos:

$$\Delta y = 0{,}5\,[(x + \Delta x)^2 - x^2],$$

o bien

$$\Delta y = 0{,}5\cdot[2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}5\,(2x + \Delta x) = x + 0{,}5\cdot\Delta x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = x + 0{,}5\cdot\Delta x.$$

Si el punto M_1 se aproxima ilimitadamente al punto M, tendremos que $\Delta x \to 0$ y el ángulo α, en este caso tiende al ángulo límite φ, formado por la tangente MT con el eje Ox. Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} (x + 0{,}5\cdot\Delta x) = x,$$

o bien $\operatorname{tg}\varphi = x$.

De este modo encontramos que el coeficiente angular (pendiente) de la tangente a la parábola $y = 0{,}5x^2$ en un punto

arbitrario es igual a x, es decir, a la abscisa del punto de tangencia.

Si $x = 1$, tendremos que $\operatorname{tg} \varphi = 1$, $\varphi = 45°$ o sea, en el punto de abscisa $x = 1$ la tangente está inclinada en un ángulo de 45° (pendiente de la tangente) respecto del eje Ox.

Los tres problemas examinados son diferentes por su contenido físico y geométrico, sin embargo su resolución requirió la aplicación de iguales razonamientos: en cada problema la magnitud buscada (incógnita) resultó ser el límite de la relación de dos incrementos. Se podía haber expuesto una serie de otros problemas de la técnica y de las ciencias naturales, que se resolverían por el mismo método.

Teniendo en cuenta la importancia extraordinaria del límite antes señalado para las matemáticas y las ciencias aplicadas, a éste se le ha dado una denominación especial.

§ 251. Definición de derivada

Supongamos que $y = f(x)$ es una cierta función.

DEFINICIÓN 1. El límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento, cuando el incremento del argumento tiende a cero, se llama *derivada de la función dada*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ — derivada.}$$

Aquí se han dado tres notaciones distintas de la derivada: y' (se lee «i griega prima»); $f'(x)$ («efe prima de x»); $\frac{dy}{dx}$ («de i griega sobre de equis» o «dy respecto de dx»).

Ahora se puede decir:

1) Si con la fórmula $S = f(t)$ se da la ley del movimiento rectilíneo, la velocidad del movimiento (velocidad instantánea) para cualquier instante de tiempo es la derivada del camino (espacio) respecto del tiempo:

$$v_{\text{inst}} = \frac{dS}{dt} \qquad \text{(problema 1).}$$

2) Si se da la ley de distribución de la masa respecto de la longitud de la barra heterogénea, es decir, $M = f(x)$, la densidad lineal de la barra en la sección x es la derivada de la masa respecto de la distancia (respecto de la longitud):

$$\gamma_x = \frac{dM}{dx} \qquad \text{(problema 2).}$$

3) Si la ecuación de la curva es $y = f(x)$, la derivada de la ordenada respecto de la abscisa es el coeficiente angular (pendiente) de la tangente MT, trazada a la curva en el punto M:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = k_{\text{tang}} \qquad \text{(problema 3).}$$

En esta formulación se da el *sentido geométrico de la derivada*.

Conviene hacer notar que fijado el valor del argumento ($x = x_0$) la derivada de la función dada es un número determinado. Este número se designa por $y'(x_0)$ ó $f'(x_0)$. Así se obtuvo al resolver el problema 1 sobre el movimiento del ascensor. Aquí hubo que hallar la velocidad en el instante de tiempo $t = 4$ s; respuesta:

$$S'(4) = 14, \text{ o bien } \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=4} = 14.$$

Si no se fija el valor inicial del argumento, conservándose arbitrario, la derivada de la función dada es la función del mismo argumento, sólo que la ley de dependencia de y' respecto de x, en general, es distinta que la ley de dependencia de y respecto de x. Esto se aprecia de la resolución del problema 3: aquí la función es $y = 0{,}5x^2$, su derivada $y' = x$.

● DEFINICIÓN. La función que tiene derivada finita en todos los puntos de un cierto intervalo (a, b), se llama *diferenciable en ese intervalo.*

La gráfica de la función diferenciable se llama *curva plana* y la propia función se llama *plana.*

Existen funciones que en ciertos puntos (o incluso en todos los puntos) no tienen derivada. Un ejemplo de tal función está representado en la fig. 161: aquí, en el punto $x = c$ se puede trazar a la curva dos tangentes distintas: la izquierda CP, cuando $\Delta x < 0$, y la derecha CT, cuando $\Delta x > 0$. En estos casos se dice que no existe ninguna tangente, puesto que el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ no debe depender de que Δx tienda a cero por la derecha o por la izquierda, es decir, las tangentes derecha e izquierda deben coincidir.

En adelante se hablará sólo de funciones diferenciables. Las frases «hallar la derivada» y «diferenciar una función» por su sentido son equivalentes.

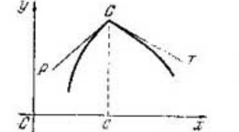


Fig. 161.

§ 252. Regla general de determinación de la derivada

La derivada de cualquier función diferenciable $y = f(x)$ se halla por el siguiente esquema:

1) Incrementamos el argumento x en Δx y hallamos el valor incrementado de la función: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2) Del valor incrementado de la función restamos el valor inicial de la función: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3) Hallamos la razón del incremento de la función al incremento del argumento: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (ésta es la velocidad media de variación de la función).

4) Hallamos el límite de la razón del incremento de la función al incremento del argumento, cuando éste tiende a cero.

Este límite es la derivada de la función dada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función $y = \sqrt{x}$:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Antes de pasar al límite, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2. ¿Cuál es la pendiente (ángulo de inclinación) de la tangente a la hipérbola $y = 4/x$ en el punto $x = 2$?

Al principio hallamos la derivada y' en un punto cualquiera $x\,(x \neq 0)$ de la función $y = 4/x$:

$$\Delta y = \frac{4}{x+\Delta x} - \frac{4}{x} = \frac{4\,(x-x-\Delta x)}{x\,(x+\Delta x)}, \quad \Delta y = -\frac{4\Delta x}{x\,(x+\Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{x\,(x+\Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4}{x\,(x+\Delta x)} = -\frac{4}{x^2}, \quad y' = -\frac{4}{x^2}.$$

Ahora $y'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$.

Por lo tanto, $\operatorname{tg} \varphi = -1$, es decir, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ (o bien 135°).

▲ **Ejercicios**

1. Se sabe que el camino recorrido por un cuerpo que cae libremente se calcula por fórmula $S = gt^2/2$, donde S es el camino en metros, g es la aceleración de la gravedad, igual a 9,8 m/s², t es el tiempo en segundos.
1) Hallar la velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 5$; 2) hallar la velocidad v del cuerpo en el instante $t = 2$, calculando $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$; 3) demostrar que la velocidad v del cuerpo que cae libremente en cualquier instante de tiempo t es igual a $v = gt$.
2. Un cuerpo se mueve rectilínea y uniformemente acelerado según la ley $S = 5t^2 + 8t + 10$, donde t es el tiempo en segundos, S es el camino recorrido en metros. Hallar: 1) la velocidad del movimiento al final del 8º segundo; 2) ¿al final de cuántos segundos la velocidad alcanza 128 m/s?
3. Calculando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y\Delta}{\Delta x}$, hallar las derivadas de las funciones:

1) $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 8$;

5) $y = \frac{x^3}{2} + 3x + 1$; 6) $y = \cos x$; 7) $y = \frac{x+1}{1-4x}$.

4. Calcular $f'(0)$, si $f(x) = \sqrt{1} + x$.
5. Hallar los ángulos de inclinación de las tangentes trazadas a la parábola $y = 0{,}5x^2 + 1$ en los puntos de abscisas $x = \pm 1$.
6. ¿Bajo que ángulo se intersecan las parábolas: $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$?

▲ Observación. Se llama ángulo de intersección de dos curvas el ángulo formado por las tangentes trazadas en el punto de intersección de las curvas.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Capítulo I

2. 6400; 6360; 6357. **3.** La segunda escritura indica una medición más precisa. **5.** Con precisión de hasta 0,02 m. **6.** 5,286. **7.** 18,6 y 18,8. **8.** 0,05%. **9.** El segundo. **10.** Es más preciso $3\frac{1}{7}$. **11.** 18,8. **12.** 6,829. **13.** 615 km (± 5 km). **14.** 164 kg. **15.** 0,25. **16.** 2%. **17.** Con tres cifras exactas **18.** Con precisión de hasta 0,5%. **19.** 14,1 quintales métricos. **20** Con exactitud de hasta 0,1 cm.

Capítulo II

1 1) $\frac{4}{3}$; 3) $2b$. **2.** 1) 0; $-\frac{8}{3}$; 3) 6; 8; 5) 0,7; 0,3;

7) $\frac{3m+8}{m^2+6}$; $\frac{4m-9}{m^2+6}$; 9) $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; 11) $\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$ $\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$;

a y b no son iguales a 0; 13) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$;

15) $-\frac{m(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+a$; $-\frac{n(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+b$;

$-\frac{p(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+c$ con la condición de que $Am+Bn+Cp\neq$ $\neq 0$; 16) -5; 2 y 3; 2. **3.** $k\neq 7{,}5$. **4.** $k=2$. **5.** $k=8$.

Capítulo III

1. 1) $x>2$; 3) $x<7$; 5) $x>\frac{2(1-k)}{3-6k}$ si $k<0$; 7) $\frac{2}{3}<x<\frac{8}{3}$;

9) $x<-1$ y $x>4$.

2. 1) $x>\frac{3}{2}$; 3) $\frac{53}{4}<x<20$. **3.** $-\frac{3}{2}<a<4$.

4. $\frac{26}{3}<m<\frac{91}{5}$; **5.** $10<a<12$.

6. $m<-4$ y $m>2$. **7.** Si $n=0$; 1.

5. 3) x^{2n-2}; 6) a^{18}; 8) a^{6m}. 6. $\frac{c-d}{(a+b)^3}$.

7. 2) $\sqrt{15}$; 5) $\sqrt{abx}$; 8) $\sqrt[3]{10}$; 10) $\sqrt{\frac{a}{4c}}$; 13) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$.

8. 1) Mayor que $3\sqrt{2}$; 2) más de $3\sqrt{10}$. 9. 3) $\frac{6}{7}\sqrt{2}$; 6) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 11) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; 12) $|x-1|\sqrt{2}$; 15) $\sqrt[3]{1+b}$. 11. 7) $0,7\sqrt[3]{xy^2}$ y $0,3\sqrt[3]{xy^2}$; 8) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a-b}$ y $\frac{2}{b}\sqrt{a-b}$. 12. 1) $20\sqrt{2}$; 6) 0.

13. 3) $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{9a^2b^2}$, $\sqrt[6]{8c^3}$. 14. 1) $\sqrt[4]{2^3}$; 4) $2\sqrt[12]{2}$. 15. 3) $\sqrt{10}$; 5) $x\sqrt[15]{x}$; 9) $0,4\,ab$; 11) 7; 13) 1; 15) a^2-b; 17) $(a+b)^2$; 19) $102+9\sqrt{6}$; 21) 1; 23) y. 16. 4) a^2b^2; 7) $a+b+2\sqrt{ab}$; 10) $2(x+\sqrt{x^2-y^2})$; 13) $\frac{(x+y)^2}{xy}$; 19) $(p^2-q^2)^2$. 18. 2) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$; 9) $2-\sqrt{3}$. 19. $4x\sqrt{x^2-1}$. 24. m. 26. 2) $a^{\frac{2}{3}}$; 6) $(x-y)^{\frac{1}{3}}$; 8) $a^{-\frac{1}{2}}$; 11) $3(x-y)^{-\frac{1}{3}}$; 12) $3ab(a+b)^{-\frac{2}{5}}$. 27. 4) $\frac{1}{8}$; 10) $\frac{1}{81}$; 13) $12\frac{4}{9}$.

28. 3) $x-y$; 6) a^2+a+1; 10) x^2+2; 12) a. 29. 1) $\frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\frac{4}{a+\sqrt{a}+1}$.

30. $\frac{a^3}{2(a-1)}$. 31. 1) x^4; 2) $a^{-\frac{8}{5}}b^{-1}$; 3) $-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Capítulo VI

1. $f(-1)=0$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. 2. $\frac{f(2)}{\varphi(2)}=\frac{5}{8}$; $f(1)\cdot\varphi(3)=39$.

3. 1) Todo el eje real; 2) $x \geqslant -\frac{1}{2}$; 3) $x \leqslant 0$; 4) todo el eje real, excepto los puntos $x=\pm 1$; 5) $|x| \geqslant 2$; 6) todo el eje real, excepto el punto $x=\frac{3}{2}$; 7) todo el eje real, excepto el punto $x=0$.

4. Serán pares las funciones dadas en los ejemplos 1) y 6); impares en los ejemplos 4) y 7). 6. 1) $y=x^2+1$; 2) $y=x^2-2$. 7. 1) Para $q>0$ el vértice se encuentra sobre el eje Ox, si $q<0$, debajo del eje Ox, si $q=0$ el vértice coincide con el origen de coordenadas. 8. 1) $y=(x-4)^2$; 2) $y=(x+3)^2$. 9. 1) Desplazamiento a la derecha a 2 unidades y hacia arriba a 1 unidad; 2) desplazamiento a la

izquierda a 1 unidad y hacia abajo a 4 unidades. **10.** 1) $y = (x-3)^2 + 2$; 4) $y = (x + 1{,}5)^2 - 2{,}5$. **11.** Desplazamiento a 4 unidades a la derecha y a 9 unidades hacia abajo, el vértice de la parábola está en el punto (4; —9); 2) desplazamiento a 2 unidades a la izquierda y a 1 unidad hacia abajo, el vértice de la parábola está en el punto (—2; —1). **12.** 1) Las parábolas son simétricas respecto del eje Ox y tienen vértice común en el origen de coordenadas; 3) las parábolas tienen el vértice común (—2; 3) y son simétricas respecto de la recta $y = 3$. **13.** $a = 2$. **14.** $a = -1$. **15.** $a = \frac{3}{8}$; $c = -\frac{27}{8}$. **16.** $x = \frac{7}{2}$. **17.** $x = 4$.

Capítulo VII

1. 1) —3,5 y 3; 3) 2; 5) $-2a$ y $2b$; 7) $-\frac{a}{7}$ y $\frac{a}{8}$; 8) $-\frac{89}{14}$ y 1; 9) $\frac{b \pm \sqrt{b^2-4a}}{2}$; 10) $\frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{a-b}{a+b}$ y $\frac{a+b}{a-b}$; 12) $\frac{a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)}}{3}$; 13) no hay raíces reales; 14) $\frac{m}{m-n}$ y -1; 17) $-\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \pm 2$; 19) $a+b$ y a^2-b^2. **2.** 8 puntos. **3.** $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$. **4.** 15 m y 25 m. **5.** 30 cm y 12,5 cm. **6.** No hay. **7.** En el pentágono. **8.** Son posibles triángulos rectángulos conformemente con los lados; 3, 4; 5 y 6, 8, 10, sin embargo 3) no existe un triángulo rectángulo, cuyos lados se expresen por tres números pares sucesivos, puesto que la suma de los cuadrados de los números impares es un número par, que no puede ser igual al cuadrado de un tercer número impar, es decir, a un número impar. **9.** 5 km y 6 km. **10.** 3 horas y 5 horas. **11.** 20 km/hora. **12.** 48 km/hora y 36 km/hora. **13.** 20 horas y 30 horas. **14.** 2400 rublos. **15.** 630 km y 420 km. **16.** 180 km y 60 km. **18.** 3) 1,23 y —0,40; 4) 0,42 y 0,72. **19.** 1) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 3) $2x^2 - 7x - 4 = 0$; 4) $x^2 - 9 = 0$; 6) $x^2 - \frac{b}{a}x = 0$; 8) $12x^2 - 25x + 12 = 0$; 9) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$; 10) $4x^2 - 4mx + m^2 - n^2 = 0$; 11) $x^3 - 4x + 1 = 0$; 12) $2x^2 - 2x - 1 = 0$; 13) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ **21.** 1) $m = \pm 12$; 2) $m = 4$; 3) $m = \frac{-10}{9}$ y $m = 2$. **22.** 1) $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$; 3) $b^2 - 4ac > 0$, $a > 0$ y $c < 0$. **23.** 1) $m = a^2 - b^2$; 3) $m = -2$; 4) $m = -(2a+5)$. **24.** 1) $k = -\frac{27}{4}$; 2) $k = -\frac{13}{16}$; 4) $k = -\frac{25}{2}$. **25.** $a = -\frac{8}{25}$. **26.** $a^4x^2 - (2b^2 - 4ac)a^2x + b^4 - 4ab^2c = 0$. **27.** 1) 0; 5; —3; 3) 0; —4; —7; 4) 3; —1; 1; 6) $x = 2$, y dos raíces más son números imaginarios; 8) 0; $\pm\sqrt{2}$. **28.** $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$; 3) $(x^2-4)(x^2-9) = 0$; 5) $(x-a)(x-b) \times (x+c)(x-d) = 0$. **29.** 1) ± 1; $+4$; 3) $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{6}$; 5) ± 2; dos raíces más son números imaginarios. **30.** 1) 4; 3) 24; 4) 77; 6) 7;

7) 40; 8) 4; 9) 4; 10) 6; 11) $3a$; 12) 3; 14) 64; 16) 4; 18) $\frac{5}{4}$; 20) 3; 22) $3a$ y $4a$ ($a>0$); 23) 0; 24) $\frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$ ($a>0$ y $|b|\leqslant a$); 25) si $a<0$ y $b^2-a^2\geqslant 0$ $x=0$; si $a>0$ y $a\geqslant|b|$ $x=\frac{5a^2-b^2}{4a}$; si $a=b=0$ todo número positivo x satisface la ecuación; 26) $\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ ($b>0$); 28) $\frac{3}{4}a$ ($a>0$). **31.** 1) (7; 5) y (−5; −7); 3) (9; 5) y (−9; −5); 5) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; 7) (2; 2) 9) (5; 3) y $\left(\frac{3}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$; 10) (3; 1); (−3; −1); $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ y $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; 11) (2; 2); (−2; −2); (2; −2) y (−2; 2); 12) (7; 4); (4; 7); (−7; −4) y (−4; −7); 13) (8; 4) y (4; 8); 14) (6; 3); (3; 6); $\left(-9;\ -\frac{9}{2}\right)$ y $\left(-\frac{9}{2};\ -9\right)$; 15) (6; 3) y (−6; −3); 17) $(10+4\sqrt{6};\ 10-4\sqrt{6})$; 18) (8; 2) y (2; 8); 19) (9; 4) y (4; 9); 20) $\left(\frac{b}{(1-m)\sqrt{m}};\ \frac{b\sqrt{m}}{1-m}\right)$, donde $m=\frac{a^2-2\pm\sqrt{a^2(a^2-4)}}{2}$; 21) $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$; 22) (8; 64) y (64; 8); 23) (4; 9) (9; 4); (−4; −9) y (−9; −4); 24) $\left(\frac{a^2+2b+\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2};\ \frac{a^2+2b-\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2}\right)$; 25) (6; 3), $\left(-3;\ -\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{12+\sqrt{351}}{23};\ 12+\sqrt{351}\right)$ y $\left(\frac{12-\sqrt{351}}{23};\ 12-\sqrt{351}\right)$; 26) (4; 2). **32.** (15; 9) y (−15; −9). **33.** 12 y 8. **34.** $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$; **35.** 1) $1<x<4$; 2) $x<1$ y $x>2$; 3) $1<x<7$; 4) $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 4$; 5) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<1$ y $x>\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 6) $-3<x<3$; 7) $\frac{5-\sqrt{41}}{2}<x<1$ y $4<x<\frac{5+\sqrt{41}}{2}$; 8) $x\leqslant-\sqrt{12}$; $-6\leqslant x\leqslant 6$ y $x\geqslant\sqrt{12}$. **36.** 1) $-4<x<-1$ y $2<x<3$; 2) $2<x<5$; 3) $-1{,}5<x\leqslant-1$.

Capítulo VIII

3. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$. 6. $\text{proy}_l\,\mathbf{a}=-4$. 7. $\overrightarrow{AB}=4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{BC}=6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{CD}=-4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{DA}=-6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{AC}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{BA}=-4\mathbf{i}$. 8. $\overrightarrow{AM}=2\mathbf{i}+6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{AN}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\overrightarrow{MN}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. 9. Resultante $\overrightarrow{OM}=\{8;\ -2\}$; $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{68}$. 12. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-5$. 13. $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{17\cdot 13}}$. 14. $\text{proy}_b\,\mathbf{a}=\frac{9}{\sqrt{73}}$; $\text{proy}_a\,\mathbf{b}=\frac{9}{\sqrt{34}}$.

15. $\cos\varphi=\frac{21}{5\sqrt{37}}$. 16. $y=-6$. 19. 1. 20. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Capítulo IX

2. 1) $\frac{\pi}{90}$; 4) $\frac{5\pi}{72}$; 7) $\frac{16\pi}{9}$; 4. 1) 120°; 3) 270°; 5) 22°30′; 17) 18°. 6. 102°. 7. $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{4}{5}\pi$; $\frac{22}{15}\pi$; 2π; $3{,}5\pi$; $0{,}06\pi$; $0{,}01\pi$; $0{,}75\pi$. 8. $\frac{3}{4}$ (rad). 11. 15,9 cm. 13. $P=44{,}1$ cm; $S=106$ sm². 15. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{8\pi}{9}$. 22. 1) $\operatorname{sen}285°<0$; 4) $\operatorname{tg}327°20'<0$. 24. 1) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$; 3) $60°\leqslant x\leqslant 300°$. 25. 1) $\cos\alpha=-0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$; $\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. 26. 1) -7; 3) $-p$. 27. 1) sen 15°; 3) $-\operatorname{tg}45°=-1$; 5) $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. 28. 1) $\operatorname{sen}60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\operatorname{tg}60°=-\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{sen}0{,}4\pi$; 8) $-\operatorname{ctg}0{,}3\pi$. 29. 1) $\operatorname{tg}10°\cdot\operatorname{sen}10°$; 3) 1; 5) $\cos 0{,}1\pi\cdot\operatorname{sen}^2 0{,}1\pi$; 6) 0; 7) $\cos A$; 8) $-\operatorname{sen}0{,}5$; 9) 0; 10) $\cos^2 10°$; 11) $2\operatorname{tg}B$; 12) $\operatorname{tg}x\cdot(\operatorname{sen}x-\cos x)$. 31. 1) $0<x<\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ y $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$; 4) $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{11\pi}{6}<x\leqslant 2\pi$; 5) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ y $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$; 7) $\frac{\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$ y $\frac{9\pi}{8}<x<\frac{15\pi}{8}$; 8) $0<x<\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$; 9) $0<x<\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$; 10) $0<x\leqslant\frac{\pi}{6}$ y $\pi<x\leqslant\frac{7\pi}{6}$; 11) $\frac{7\pi}{12}<x<\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}<x<\frac{23\pi}{12}$; 12) $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}<x\leqslant 2\pi$; 13) $0\leqslant x<\frac{11\pi}{24}$ y $\frac{43\pi}{24}<x\leqslant 2\pi$; 14) $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}<x<\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}<x<\frac{17\pi}{12}$ y $\frac{19\pi}{12}<x<\frac{23\pi}{12}$.

Capítulo X

1. 1) $-\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{117}{125}$; 6) $\frac{44}{117}$. 2. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{140}{221}$. 3. 1) $-\cos(a-b)$, 3) $\operatorname{sen}x$; 5) $\operatorname{tg}2\alpha$; 7) $\operatorname{ctg}2\alpha$; 8) $\operatorname{tg}^2\alpha$. 4. 1) 3; 3) $-\frac{7}{25}$; 5) $\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{20}}$.

5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1. 7. 1) $\frac{1}{72}(28\sqrt{2}+7\sqrt{15})$. 9. 1) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x=\frac{\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 9) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1 \ldots)$; 11) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. 10. 1) 1,5; 2) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$. 11. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 2) $2\operatorname{sen}\frac{3a}{2}\cos a\cos\frac{a}{2}$; 3) $\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\operatorname{sen}4\alpha}$; 4) $2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$; 5) $\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$; 6) $\frac{4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$.

Capítulo XI

1. 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$. 2. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. 3. 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. 5. 1) $x=\operatorname{arc\,sen} y$; 2) $x=\operatorname{arc\,sen} 2y$; 4) $x=\operatorname{arc\,ctg} 4y$; 5) $x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{3}$. 6. 1) $x=2\operatorname{sen} y$; 3) $x=\cos 2y$; 4) $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{3}$. 7. 1) 0,6; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2x\sqrt{1-x^2}$. 9. 1) $x=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+\pi k+\frac{\pi}{8}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. 10. 1) $2\operatorname{sen}55^\circ\cos 25^\circ$; 3) $2\operatorname{sen}4\cos 1$; 5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sec\frac{3\pi}{5}$; 7) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 11) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 14) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. 11. 1) $\operatorname{sen}60^\circ+\operatorname{sen}20^\circ$; 3) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha)$; 5) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$; 8) $\frac{1}{2}\left[\cos 3x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$. 13. 1) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 4) $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 8) $x=\pm 60^\circ+180^\circ k-15^\circ$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 10) $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)-\frac{\pi}{20}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x=$

$=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 15) $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arc\,tg} 5+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 17) $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 19) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 21) $x=\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 22) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 23) $x_1=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$; $x_2=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 24) $x_1=$ $=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\frac{k\pi}{5}$; $x_3=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 25) $x=$ $=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 26) $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+k\pi$ $(k=0,$ $\pm 1, \ldots)$; 27) $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{5}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 28) $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 29) $x_1=2k\pi$; $x_2=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x_3=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 30) $x_1=k\pi$; $x_2=$ $=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 31) $x=(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 32) $x_1=(2k+1)\pi$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Capítulo XII

3. 2) $a_n=\frac{n}{2n-1}$. 10. 144, 168, 192. 14. 1) $d=4$; $S_n=207$; 2) $a_n=$ $=-4$; $n=7$; 3) $a_n=-32$; $S_n=-5$; 4) $n=13$; $S_n=403$; 5) $a_1=1$; $a_n=469$; 6) $n=17$; $a_n=50$; 7) $a_1=5{,}2$; $S_n=584{,}8$; 8) $a_1=2{,}3$; $n=19$; 9) $d=5{,}5$; $n=20$; 10) $a_1=15$, $d=-3$. 15. $\div$ 12, 10, 8, ... 16. $\div$ 12. 9, 6, 3, ... ó $\div -9$, -6, -3, 0, ... 19. 3. 20. $2\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{3}$. 21. 7 ó 13. 30. $q=\frac{1}{3}$; $S_7=53\frac{79}{81}$. 31. $a_1=2$, $a_7=1458$. 32. $n=6$. 33. $q_1=12$; $q_2=-13$. 34. $6\frac{1}{4}$ ó $-56\frac{1}{4}$. 35. 5; 15; 45. 37. 5; 10; 20; 40. 39. 154,8 m. 40. 5 min. 41. 9 s; 108 m. 42. 1) $1<q<$ $<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<1$.

Capítulo XIII

3. 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{9}{5}$. 4. 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{3}{2}$. 5. 10) $\frac{1}{64}$; 11) $\frac{9}{4}$; 12) 8. 8. 1) Entre -2 y -1; 3) entre -3 y -2; 4) entre -5 y -4. 9. 1) Entre -4 y -3; 2) entre -5 y -4

3) entre -7 y -6. **10.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{3}{20}$; 5) $\frac{1}{10}$. **11.** 1) 3; 2) $3^{\frac{9}{4}}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{9}$. **12.** Progresión geométrica: 2, 4, 8, 16, ... **19.** 2,3 y 5. **22.** 15) $\lg y = 3\lg a - \frac{11}{9}\lg b - \frac{2}{9}\lg c$; 17) $\lg y = 3\lg b + \frac{3}{4}\lg c - \frac{1}{2}\lg a$; 18) $\lg x = \frac{1}{n}\left(\lg m + \frac{2}{p}\lg b\right)$; 19) $\lg z = -\frac{1}{2}\left(\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{4}\lg c\right)$; 20) $\lg y = \frac{1}{m}\left[(n+1)\lg a + \frac{p}{n}\lg b\right]$; 21) $\lg x = \frac{\sqrt{2}}{2}\lg 3$; 22) $\lg x = \lg \log_a^3 (a+b)$. **23.** 8) $z = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3c^2}}$; 9) $y = \sqrt[5]{\frac{(a-b)^3(a+b)^2}{a^4}}$; 10) $z = \frac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{ac^3}(b+1)}}{b\cdot(c+a)^3}$. **27.** 3) $-3{,}9925$; 4) $-5{,}0083$. **28.** 3) $\bar{3},9981$; 4) $\bar{4},0096$; 5) $\bar{1},2672$. **34.** 4) 0,3245; 5) $\bar{1},4333$. **35.** 2) 1,56; 11) 0,339; 12) 9,00; 13) 0,587; 14) 0,26; 15) 1,072; 16) 4,47; 17) 1,17; 18) 0,893; 19) $8{,}09\cdot 10^{-6}$; 23) 0,706; 24) 1,816; 25) 5,85; 26) 0,417. **36.** 1) $x=\pm 1$; 2) $x=11$; 3) $x=2$; 4) $x=\frac{-15}{4}$; 5) $x=7$; 6) $x=3$; 7) $x=\pm 2$. **37.** 1) $x\approx 0{,}806$; 2) $x\approx -2{,}4$; 3) $x=\pm\sqrt{\frac{\lg 22{,}1}{\lg 7}}$. **38.** 1) 2 y $\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg 3}$; 2) 1, 3 y 4; 3) 0 y $\frac{\lg 5}{\lg 7}$; 4) $\frac{9}{2}$; 5) 100 y 1000; 6) 1000 y $\frac{10}{10\sqrt[3]{10}}$; 7) $x=10$; 8) 0,1 y 100; 9) 13,34 y $7499\cdot 10^4$; 10) 7 y 15; 11) 100 y 0,1; 12) $x=\frac{1}{2}$; 13) 100 y 0,01; 14) 2 y 3; 15) 3 y 7. **41.** $\frac{8}{3}$. **42.** 2 y -1. **43.** 1 y 2. **44.** $-1{,}2$, $\frac{7\pm\sqrt{41}}{2}$. **45.** 10. **46.** $-0{,}9$. **47.** 10. **48.** $\frac{29}{8}$. **50.** 2 y 4. **51.** 9. **52.** $\frac{1}{2}$ y 16. **53.** 2 y $-\frac{4}{3}$. **54.** $x=5$; $y=7$. **55.** $x=2$; $y=6$. **56.** 5, $\sqrt[5]{5}$. **57.** 4. **58.** $\frac{5}{3}$. **59.** $\frac{7}{2}$. **60.** 3 y 13. **61.** 7. **62.** $x=0$. **63.** $x=10$. **64.** $x=10$ y $10^{-\frac{9}{2}}$. **65.** $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=\frac{10}{a}$. **66.** 1. **67.** $\sqrt[5]{5}$ y 5. **68.** 100 y 0,01. **69.** 10. **70.** $x_1=2$; $x_2=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg 3}$. **71.** $x=\frac{3}{2}$. **72.** $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{16}$. **73.** $x_1=\frac{1}{81}$; $x_2=3$. **74.** $x=10^3$. **75.** $x=2$. **76.** $x=\operatorname{arc\,tg} 10+\pi k$. **77.** $x=4$. **78.** $x=5$. **79.** $x_1=1$; $x_2=2$. **80.** 1) $x>2$; 2) $\frac{2}{11}<x<\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$; 4) $x<-\frac{3}{2}$ y $x>3$; 5) $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2}$; 6) $x<-1$ y $x>5$; 7) $\frac{7}{2}<x<5$ y $x>5$; 8) no tiene soluciones. **83.** 1) $x=5$; $y=3$; 2) $x=3$; $y=4$;

3) $x=4$; $y=\sqrt{2}$ y $x=4$; $y=-\sqrt{2}$; 4) $x=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; $y=\frac{1}{6}$ y $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; 5) $x=6$; $y=3$; 6) $x=25$; $y=16$ y $x=16$; $y=25$; 7) $x=\frac{1}{10}$; $y=2$ y $x=100$; $y=-1$; 8) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $y=\sqrt[3]{9}$ y $x=1$; $y=1$; 9) $x=4$; $y=6$. **84.** 1) $-1<x<-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}<x<2$; 2) $1<x<3$.

Capítulo XIV

1. 2) 51; 5) 0,0435; 7) 0,612; 10) 0,000139; 11) 0,00785. **2.** 1) 0,74; 2) 50; 3) 13,9; 4) 45,2; 5) 1310; 6) 34; 7) 505; 8) 2640; 9) 0,000458; 10) 0,0124; 11) 7,32; 12) 1410. **3.** 1) 9,75; 2) 39,2; 3) 0,216; 4) 8,25. **4.** 1) 1700; 2) 0,284; 3) 0,338; 4) 30,2; 5) 419; 6) 0,00729; 7) 0,059; 8) 1480; 9) 0,00237; 10) 1910. **5.** 1) 182; 2) 18,9; 3) 0,493; 4) 0,00095; 5) 174 000; 6) 449 000; 7) 1,19; 8) 0,000372. **6.** 1) 0,632; 2) 0,279; 3) 67,6; 4) 2,14; 5) 0,0158; 6) 0,00775. **7.** 1) 7,52; 2) 1,62; 3) 3,49; 4) 0,752; 5) 0,162. **8.** 1) 334; 2) 16,95; 3) 0,0854; 4) 0,122; 5) 44,7. **9.** 1) 0,660; 2) 0,815; 3) 1,55; 4) 0,991; 5) 0,460; 6) 0,867. **10.** 1) 33,5; 2) 23,2; 3) 570; 4) 46,9. **11.** 1) 0,25; 2) 16,2; 3) 0,41. **12.** 1) 0,886; 2) 30,4; 3) 5,97; 4) 1,47; 5) 1,275. **13.** 1) 5,4; 2) 0,00058.

Capítulo XV

2. c) $8i$. **3.** c) $17+4i$. **4.** c) $a+(b+1)i$. **5.** c) $4+2i$. **6.** c) $6i$. **7.** c) $a+(b-1)i$. **8.** c) $-5+4i$. **9.** b) $1-0,5i$. **10.** c) $0,28-0,03i$. **11.** c) $-(x^2+2y)-ix\sqrt{y}$. **12.** c) $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}i$. **13.** c) $(a^2+2b)+a\sqrt{bi}$. **14.** c) $a+b$. **15.** c) $(2m+3ni)(2m-3ni)$. **16.** c) $(4+3i)(4-3i)$. **17.** $(8+i)(8-i)$. **18.** c) $-\frac{1}{2}$. **19.** c) $2,4i$. **20.** a) $1-2i$; b) i; c) $-3-2i$. **21.** a) $12-5i$; b) $1-i\sqrt{3}$; c) $i\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **22.** a) $3-2i\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$; c) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}i$. **23.** a) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; b) 0; c) $2a$. **24.** c) $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$. **25.** b) $\sqrt{5}-i\sqrt{2}$. **26.** d) -1; e) $-i$; f) 1. **27.** e) -1; f) 1. **28.** a) $2-4i\sqrt{2}$; b) $2(x^2-y^2)$; c) $2(i-1)$. **29.** a) $0,5(-1+i\sqrt{3})$; b) 1; **30.** c) $-2-2i$. **31.** a) $\sqrt{\frac{a}{2}}+i\sqrt{\frac{a}{2}}$; b) $3+2i$. **32.** a) $5+2i$; b) $6+7i$. **33.** a) $4+i$; b) $2+9i$. **34.** a) $2+\frac{i}{2}$; b) 4. **37.** a) $\sqrt{2}$ y $\frac{\pi}{4}$; e) $\sqrt{2}$ y $\frac{5\pi}{4}$. **39.** a) $\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$; b) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$; c) $3(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$; d) $\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

40. a) $\sqrt{13}(\cos 33°40'+i\operatorname{sen} 33°40')$; b) $5(\cos 53°10'+i\operatorname{sen} 53°10')$. **41.** a) $5(\cos 306°50'+i\operatorname{sen} 306°50')$; b) $9,434(\cos 32°+i\operatorname{sen} 32°)$. **42.** a) $\sqrt{13}(\cos 56°20'+i\operatorname{sen} 56°20')$; b) $13(\cos 157°20'+i\operatorname{sen} 157°20')$. **3.** a) $\sqrt{53}(\cos 254°+i\operatorname{sen} 254°)$; b) $5(\cos 323°10'+i\operatorname{sen} 323°10')$.

58. $\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}$; $n=0,\ 1$. 59. $\pm\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

60. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$.

61. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$. 62. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$; $\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$; $-i$. 63. $\cos\frac{2\pi n}{5}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{5}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 64. $\cos\frac{2\pi n}{6}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{6}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$. 65. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

67. 1) Suma de vectores: $r_1=\{2,\ 3\}$ y $r_2=\{-1,\ 1\}$, lo que nos da $r=\{1,\ 4\}$; 3) multiplicación del vector $r=\{0,\ 2\}$ por el escalar 3, lo que nos da $r_1=\{3\cdot 0,\ 3\cdot 2\}$, ó $r_1=\{0,\ 6\}$; 4) giro del vector $r=\{1,\ 2\}$ alrededor del origen de coordenadas en un ángulo recto, en sentido positivo; 5) giro del vector $r=\{1,\ 1\}$ alrededor del origen de coordenadas en el ángulo $\varphi=60°$, en sentido positivo con su alargamiento ulterior de 2 veces. 68. 1) $x=\frac{25}{7}$; $y=\frac{2}{7}$; 2) $x=0$; $y=2$; 3) $x=2$; $y=3$. 69. 1) $x_{1,2}=3\pm 2i$; 2) $x_{1,2}=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{23}i}{4}$; 3) $x_1=i$; $x_2=2+i$. 70. Los puntos complejos z se encuentran en el rayo que parte del origen de coordenadas bajo un ángulo de 45° respecto del sentido positivo del eje Ox; 4) fuera de la circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas; 5) dentro de la circunferencia de radio $r=5$ con centro en el origen de coordenadas; 6) dentro del anillo formado por dos circunferencias concéntricas de radios $r_1=2$ y $r_2=4$ con centro común en el origen de coordenadas; 8) fuera del círculo de radio $r=2$ con centro en el punto $(0;\ 1)$.

71. 1) $\sqrt{13}e^{0,983i}$; 2) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 3) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$; 4) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; 5) $2e^{\pi i}$; 6) $e^{\frac{\pi}{2}i}$. 72. 1) $1,85+0,77i$; 2) $e^2(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)=7,4\,(0,54+i\cdot 0,84)$. 73. 1) $e^{3i\ln 2}=e^{2,079i}$; 3) $5e^{i\ln 5}=5e^{1,609i}$; 4) $10e^{-i\cdot 2,303}$. 74. 1) $\cos(2-i)=-0,64+1,07i$; 4) $\operatorname{sen}(-3i)=-10,02i$. 77. $y=-\frac{3}{2}x$. 79. Los puntos complejos z se encuentran fuera del círculo de radio $r=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ con centro en el origen de coordenadas. 80. $-3<x<-2$ y $0<x<1$.

Capítulo XVI

2. $y=\sqrt{R^2-x^2}$. 3. $\frac{1}{f(1)}=2$; $[1+f(1)]^2=\frac{9}{4}$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)=\lg 0,8\approx -0,0969$. 6. 1) Todo el eje real excepto el punto $x=$

$=-5$; 2) todo el eje real, excepto los puntos $x=-3$ y $x=0$; 3) $x\leqslant\frac{3}{2}$; 4) $2\pi k+\arccos\frac{2}{3}<x<2\pi(k+1)-\arccos\frac{2}{3}$; 5) $x\leqslant 2$ y $x\geqslant 3$; 6) $|x|>2$; 7) $-\frac{1}{3}<x<2$; 8) $1\leqslant x\leqslant 4$; 10) todo el eje real, excepto el punto $x=1$; 11) $|x|\geqslant\sqrt{2}$; 12) $x\geqslant -2$. **7.** En los ejemplos: 1), 4), 5), 6), 11) están dadas funciones impares, en los ejemplos 3) 8), 10) y 12) funciones pares; las funciones de los ejemplos 2), 7) y 9) no son pares, ni impares. **11.** 2) $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}$; 3) $0, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{17}, 0$. **13.** $a_n=3-\frac{7}{n+2}$, pero $\frac{7}{n+2}\to 0$ cuando $n\to\infty$, por lo tanto $a_n\to 3$. **14.** 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2. **15.** 1) $x\to 2$; 2) $x\to\frac{\pi}{2}$; 3) $x\to 0$; 4) $x\to\frac{1}{10}$. **16.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 0; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 1; 8) $\frac{3}{2}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{2}$. **17.** 3) $\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{3}x}=\frac{x}{\frac{1}{3}x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$

$=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}\to 1$ si $x\to 0$. **18.** 1) $x=\pm 2$; 2) $x=1$; 3) $x=2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Capítulo XVII

1. 1) $v_{med}=3{,}5\,g$ (m/s); 2) $v=2g$ (m/s). **2.** 1) 88 (m/s); 2) 12 s. **3.** 1) $3x^2$; 2) $-\frac{2}{x^3}$; 3) $-\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$; 4) $4x-5$; 5) $\frac{3}{2}x^2+3$; 6) $-\operatorname{sen} x$; 7) $\frac{5}{(1-4x)^2}$. **4.** $f'(0)=\frac{1}{2}$. **5.** Si $x=1$, $\varphi=45°$; si $x=-1$, $\varphi=135°$. **6.** En los puntos de intersección cuando $x=\pm 1$ las tangentes a la parábola forman un ángulo agudo $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{11}$.

SUPLEMENTO

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE CONSULTA

Ecuaciones cuadráticas

1. $x^2+px+q=0;\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$

$ax^2+bx+c=0;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (a\neq 0).$

$ax^2+2kx+c=0;\quad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}\quad (a\neq 0).$

2. Fórmulas de Viète:

$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=q=\frac{c}{a}$

3. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2);\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$

Progresiones

a) *Progresión aritmética.*

1. Término general de una progresión aritmética

$a_n=a_1+(n-1)d.$

2. Suma de n términos de una progresión aritmética:

$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n=\left[\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right]n,$

donde d es la diferencia.

b) *Progresión geométrica.*

1. Término general de una progresión geométrica:

$u_n=u_1q^{n-1}.$

2. Suma de n términos de una progresión geométrica:

$S_n=\frac{u_1-u_nq}{1-q}=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\frac{q^n-1}{q-1},$

donde q es la razón de la progresión o denominador de la progresión $(q\neq 1)$.

3. Suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente:

$S=\frac{u_1}{1-q}.$

Logaritmos

1. La notación $\log_a N=x$ es equivalente a la notación $a^x=N$ $(a>0,$ $a\neq 1,$ $N>0)$, de manera que $a^{\log_a N}=N$

2. $\log_a 1=0.$ 3. $\log_a a=1.$ 4. $\log_a (N\cdot M)=\log_a N+\log_a M.$

5. $\log_a \frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M.$ 6. $\log_a N^n=n\log_a N.$

7. $\log_a \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N.$ 8. $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$

Tabla de signos y de ciertos valores de las funciones trigonométricas

Denominación de la función	Cuadrantes I	II	III	IV	I: 0°	30°	45°	60°	90°	II: 180°	III: 270°	IV: 360°
sen α	+	+	−	−	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	+	−	−	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	+	−	+	−	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg α	+	−	+	−	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Tabla de las fórmulas de reducción

Función \ Angulo	$-\alpha$	$90° \mp \alpha$	$180° \mp \alpha$	$270° \mp \alpha$	$360° k \mp \alpha$
sen	$-\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\operatorname{sen}\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

1. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
2. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$
3. $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$
4. $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1.$
5. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1.$
6. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$
7. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha.$
8. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$

Transformaciones de expresiones trigonométricas

1. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

2. $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$.

4. $\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

5. $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

6. $\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta-\alpha}{2}$;

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$.

7. $\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$;

$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

$\operatorname{sen} mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$.

Funciones trigonométricas inversas

1. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$.
2. $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$, $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$.
3. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$.
4. $0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x$.

Ecuaciones trigonométricas elementales

1. $\operatorname{sen} x = a$, $x = (-1)^n \operatorname{arc\,sen} a + \pi n$.
2. $\cos x = a$, $x = \pm \operatorname{arc\,cos} a + 2\pi n$.
3. $\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arc\,tg} a + \pi n$.
4. $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arc\,ctg} a + \pi n$.

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Tabla de valores de las funciones e^x, e^{-x}, sen x y cos x para el valor numérico de x

x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x	x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,40	1,4918	0,6703	0,3894	0,9211
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0000	41	1,5068	0,6637	0,3986	0,9171
02	1,0202	0,9802	0,0200	0,9998	42	1,5220	0,6570	0,4078	0,9131
03	1,0305	0,9704	0,0300	0,9996	43	1,5373	0,6505	0,4169	0,9090
04	1,0408	0,9608	0,0400	0,9992	44	1,5527	0,6440	0,4259	0,9048
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	0,9988	0,45	1,5683	0,6376	0,4350	0,9004
06	1,0618	0,9418	0,0600	0,9982	46	1,5841	0,6313	0,4439	0,8961
07	1,0725	0,9324	0,0699	0,9976	47	1,6000	0,6250	0,4529	0,8916
08	1,0833	0,9231	0,0799	0,9968	48	1,6161	0,6188	0,4618	0,8870
09	1,0942	0,9139	0,0899	0,9960	49	1,6323	0,6126	0,4706	0,8823
0,10	1,1052	0,9048	0,0998	0,9950	0,50	1,6487	0,6065	0,4794	0,8776
11	1,1163	0,8958	0,1098	0,9940	51	1,6653	0,6005	0,4882	0,8727
12	1,1275	0,8869	0,1197	0,9928	52	1,6820	0,5945	0,4969	0,8678
13	1,1388	0,8781	0,1296	0,9916	53	1,6989	0,5886	0,5055	0,8628
14	1,1503	0,8694	0,1395	0,9902	54	1,7160	0,5827	0,5141	0,8577
0,15	1,1618	0,8607	0,1494	0,9888	0,55	1,7333	0,5769	0,5227	0,8525
16	1,1735	0,8521	0,1593	0,9872	56	1,7507	0,5712	0,5312	0,8473
17	1,1853	0,8437	0,1692	0,9856	57	1,7683	0,5655	0,5396	0,8419
18	1,1972	0,8353	0,1790	0,9838	58	1,7860	0,5599	0,5480	0,8365
19	1,2092	0,8270	0,1889	0,9820	59	1,8040	0,5543	0,5564	0,8309
0,20	1,2214	0,8187	0,1987	0,9801	0,60	1,8221	0,5488	0,5646	0,8253
21	1,2337	0,8106	0,2085	0,9780	61	1,8404	0,5434	0,5729	0,8196
22	1,2461	0,8025	0,2182	0,9759	62	1,8589	0,5379	0,5810	0,8139
23	1,2586	0,7945	0,2280	0,9737	63	1,8776	0,5326	0,5891	0,8080
24	1,2712	0,7866	0,2377	0,9713	64	1,8965	0,5273	0,5972	0,8021
0,25	1,2840	0,7788	0,2474	0,9689	0,65	1,9155	0,5220	0,6052	0,7961
26	1,2969	0,7711	0,2571	0,9664	66	1,9348	0,5169	0,6131	0,7900
27	1,3100	0,7634	0,2667	0,9638	67	1,9542	0,5117	0,6210	0,7838
28	1,3231	0,7558	0,2764	0,9611	68	1,9739	0,5066	0,6288	0,7776
29	1,3364	0,7483	0,2860	0,9582	69	1,9937	0,5016	0,6365	0,7712
0,30	1,3499	0,7408	0,2955	0,9553	0,70	2,0138	0,4966	0,6442	0,7648
31	1,3634	0,7334	0,3051	0,9523	71	2,0340	0,4916	0,6518	0,7584
32	1,3771	0,7261	0,3146	0,9492	72	2,0544	0,4868	0,6594	0,7518
33	1,3910	0,7189	0,3240	0,9460	73	2,0751	0,4819	0,6669	0,7452
34	1,4049	0,7118	0,3335	0,9428	74	2,0959	0,4771	0,6743	0,7385
0,35	1,4191	0,7046	0,3429	0,9394	0,75	2,1170	0,4724	0,6816	0,7317
36	1,4333	0,6977	0,3523	0,9359	76	2,1383	0,4677	0,6889	0,7248
37	1,4477	0,6907	0,3616	0,9323	77	2,1598	0,4630	0,6961	0,7179
38	1,4623	0,6839	0,3709	0,9287	78	2,1815	0,4584	0,7033	0,7109
39	1,4770	0,6771	0,3802	0,9249	79	2,2034	0,4538	0,7104	0,7038

x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x	x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x
0,80	2,2255	0,4493	0,7174	0,6967	1,20	3,3201	0,3012	0,9320	0,3624
81	2,2479	0,4449	0,7243	0,6895	21	3,3535	0,2982	0,9356	0,3530
82	2,2705	0,4404	0,7311	0,6822	22	3,3872	0,2952	0,9391	0,3436
83	2,2933	0,4360	0,7379	0,6749	23	3,4212	0,2923	0,9425	0,3342
84	2,3164	0,4317	0,7446	0,6675	24	3,4556	0,2894	0,9458	0,3248
0,85	2,3396	0,4274	0,7513	0,6600	1,25	3,4903	0,2865	0,9490	0,3153
86	2,3632	0,4232	0,7578	0,6524	26	3,5254	0,2837	0,9521	0,3058
87	2,3869	0,4190	0,7643	0,6448	27	3,5609	0,2808	0,9551	0,2963
88	2,4109	0,4148	0,7707	0,6372	28	3,5966	0,2780	0,9580	0,2867
89	2,4351	0,4107	0,7771	0,6294	29	3,6328	0,2753	0,9608	0,2771
0,90	2,4596	0,4066	0,7833	0,6216	1,30	3,6693	0,2725	0,9636	0,2675
91	2,4843	0,4025	0,7895	0,6137	31	3,7062	0,2698	0,9662	0,2579
92	2,5093	0,3985	0,7956	0,6058	32	3,7434	0,2671	0,9687	0,2482
93	2,5345	0,3946	0,8016	0,5978	33	3,7810	0,2645	0,9711	0,2385
94	2,5600	0,3906	0,8076	0,5898	34	3,8190	0,2618	0,9735	0,2288
0,95	2,5857	0,3867	0,8134	0,5817	1,35	3,8574	0,2592	0,9757	0,2190
96	2,6117	0,3829	0,8192	0,5735	36	3,8962	0,2567	0,9779	0,2092
97	2,6379	0,3791	0,8249	0,5653	37	3,9354	0,2541	0,9799	0,1994
98	2,6645	0,3753	0,8306	0,5570	38	3,9749	0,2516	0,9819	0,1896
99	2,6912	0,3716	0,8360	0,5487	39	4,0149	0,2491	0,9837	0,1798
1,00	2,7183	0,3679	0,8415	0,5403	1,40	4,0552	0,2466	0,9854	0,1700
01	2,7456	0,3642	0,8468	0,5319	41	4,0960	0,2441	0,9871	0,1601
02	2,7732	0,3606	0,8521	0,5234	42	4,1371	0,2417	0,9887	0,1502
03	2,8011	0,3570	0,8573	0,5148	43	4,1787	0,2393	0,9901	0,1403
04	2,8292	0,3535	0,8624	0,5062	44	4,2207	0,2369	0,9915	0,1304
1,05	2,8577	0,3499	0,8674	0,4976	1,45	4,2631	0,2346	0,9927	0,1205
06	2,8864	0,3465	0,8724	0,4889	46	4,3060	0,2322	0,9939	0,1106
07	2,9154	0,3430	0,8772	0,4801	47	4,3492	0,2299	0,9949	0,1006
08	2,9447	0,3396	0,8820	0,4713	48	4,3929	0,2276	0,9959	0,0907
09	2,9743	0,3362	0,8866	0,4625	49	4,4371	0,2254	0,9967	0,0807
1,10	3,0042	0,3329	0,8912	0,4536	1,50	4,4817	0,2231	0,9975	0,0707
11	3,0344	0,3296	0,8957	0,4447	51	4,5267	0,2209	0,9982	0,0608
12	3,0649	0,3263	0,9001	0,4357	52	4,5722	0,2187	0,9987	0,0508
13	3,0957	0,3230	0,9044	0,4267	53	4,6182	0,2165	0,9992	0,0408
14	3,1268	0,3198	0,9086	0,4176	54	4,6646	0,2144	0,9995	0,0308
1,15	3,1582	0,3166	0,9128	0,4085	1,55	4,7115	0,2122	0,9998	0,0208
16	3,1899	0,3135	0,9168	0,3993	56	4,7588	0,2101	0,9999	0,0108
17	3,2220	0,3104	0,9208	0,3902	57	4,8066	0,2080	1,0000	+0,0008
18	3,2544	0,3073	0,9246	0,3809	58	4,8550	0,2060	1,0000	−0,0092
19	3,2871	0,3042	0,9284	0,3717	59	4,9037	0,2039	0,9998	−0,0192

A NUESTROS LECTORES:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.
Dirijan sus opiniones a Editorial «MIR», I Rizhski per. 2, GSP I-110, Moscú, URSS.

Bugrov Ya., Nikolski S.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

La presente colección de problemas corresponde a los manuales de los mismos autores "Cálculo diferencial e integral", "Elementos de álgebra lineal y geometría analítica", "Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja" que ya han sido publicados en español por la Editorial Mir en 1984—1985.

En el comienzo de cada parágrafo se mencionan los capítulos y parágrafos de los respectivos manuales donde el estudiante puede encontrar el correspondiente material teórico.

A cada apartado del manual corresponde un número mínimo de problemas por lo tanto para la asimilación exitosa del material teórico y adquisición de hábitos prácticos es necesario obligatoriamente resolver todos los problemas.

Recomendamos esta colección a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior.

Formato 12,5 × 20,0 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta. 240 págs. con figuras. (1 tr.).

Krutítskaya N., Shishkin A.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

La colección de problemas del álgebra lineal que se presenta en este libro está basada en las conferencias y seminarios que sus autores dictaron durante muchos años en la facultad de física de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú.
El material que se expone en el mismo abarca todos los apartados y aspectos del álgebra lineal.
En el comienzo de cada capítulo que corresponde a un tema dado, se exponen brevemente las nociones y fórmulas teóricas imprescindibles para la solución de problemas, brindándose también problemas concretos que contribuyen a la asimilación del material teórico.
Los autores ofrecen modelos de solución de los problemas estándares y originales, así como problemas y ejercicios para el trabajo autodidáctico de los estudiantes, con respuestas e indicaciones.
Recomendamos la presente colección para los estudiantes universitarios y de los centros de enseñanza técnica superior. Formato 14,3 × 22,0 cm. En rústica. 128 págs. con figuras (1 tr.).